ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

МАКАРЕНКОВ ОЛЕГ ЮРЬЕВИЧ

Методы теории топологической степени в задачах И. Г. Малкина - В. К. Мельникова для периодически возмущенных систем

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор М. И. Каменский

Воронеж – 2006

Оглавление

Введение

Топологическая степень $d_{\mathbb{R}^n}(F,U)$ векторного поля $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по отношению к открытому множеству $U \subset \mathbb{R}^n$ в случае односвязного множества U, ограниченного положительно ориентированной жордановой кривой q, и $n = 2$ введена А. Пуанкаре и известна под названием индекса кривой q по отношению к полю F (см. [43], Гл. 3). А. Пуанкаре использовал полученную характеристику для анализа существования, числа и типа особых точек двумерных автономных систем. К нему же восходит основная теорема теории топологической степени: *если $d_{\mathbb{R}^2}(F,U) \neq 0$, то в U имеется особая точка поля F* и свойство аддитивности топологической степени (первое основное свойство степени), именно, *если $U = \overline{U_1 \cup U_2}$ и $U_1 \cap U_2 = 0$, где $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$ – открытые множества, ограниченные положительно ориентированными жордановыми кривыми, то $d_{\mathbb{R}^2}(F,U) = d_{\mathbb{R}^2}(F,U_1) + d_{\mathbb{R}^2}(F,U_2)$* (см. [43], с. 38). Также А. Пуанкаре доказал, что если множество U содержит простую особую точку (простой нуль) поля F и достаточно мало, то $|d_{\mathbb{R}^2}(F,U)| = 1$ (в зависимости от того $d_{\mathbb{R}^2}(F,U) = 1$ или $d_{\mathbb{R}^2}(F,U) = -1$ А. Пуанкаре делал выводы о типе особой точки), *если же в этом малом множестве нет нулей поля F, то $d_{\mathbb{R}^2}(F,U) = 0$* (второе основное свойство степени) (см. [43], с. 39). Для случая произвольных открытого ограниченного множества $U \in \mathbb{R}^n$ и $n \in \mathbb{N}$ конструкция топологической степени получена Л. Брауером [48], кто также сформулировал третье основное свойство топологической степени (принцип продолжения Брауера) о том, что *степень $d_{\mathbb{R}^n}(F,U)$ остается постоянной, если область U и отображение F непрерывно ме-*

няются так, что в образ границы ∂U этой области нигде не попадает нуль (см. [48], свойство с. 105). Наконец, Ж. Лерэ и Ю. Шаудер рассмотрели случай, когда F является разностью тождественного и компактного отображений, заданных в банаховом пространстве. Доказывая возможность аппроксимации этой ситуации некоторой конечномерной и используя в последней степень Брауера, Ж. Лерэ и Ю. Шаудер обосновали определение степени в банаховом (бесконечномерном) пространстве (см. [22], §1).

В диссертационной работе изучаются возможности применения теории топологической степени к задачам И. Г. Малкина и В. К. Мельникова о существовании T-периодических решений в системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x) + \varepsilon g(t,x,\varepsilon), \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – T-периодические по первой переменной непрерывные функции и $\varepsilon > 0$ – малый параметр. К системам вида (1) приводится большое число уравнений, описывающих разнообразные нелинейные процессы, в частности, уравнения Ван дер Поля, Дуффинга, "синус Гордона" в отсутствии демпфирования, плоского маятника, "хищник-жертва" при учете периодического изменения климата. Одной из наиболее важных рассматриваемых при этом задач является задача о существовании в системе (1) T-периодических решений. Аналитические методы решения поставленной задачи, как правило, предполагают, что правые части системы (1) некоторое число раз непрерывно дифференцируемы, а также, что известно семейство $\{\widetilde{x}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ T-периодических решений порождающей системы

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{2}$$

Одним из основных аналитических методов является основанный на теореме о неявной функции метод малого параметра Пуанкаре (см. Б. П. Демидович [11], Гл. III, § 24, М. Розо [44], Гл. 9, § 1), развитием которого для различ-

ных ситуаций занимались Л. С. Понтрягин [41], А. А. Андронов-А. Витт [1], Н. Г. Булгаков [7], Н. М. Крылов - Н. Н. Боголюбов - Ю. А. Митропольский [33], А. М. Кац [14], И. Г. Малкин [29] , В. К. Мельников [31] и другие. В работах всех указанных авторов строится соответствующая задаче бифуркационная функция M, и предъявляется условие о существовании у этой функции простого нуля $\lambda_0 \in \Lambda$, то есть такого числа, что $M(\lambda_0) = 0$ и $M'(\lambda_0) \neq 0$. Преимуществом геометрических методов обычно является то, что они работают в случае, когда возмущение g всего лишь непрерывно, а также не требуют нахождения простых нулей бифуркационных функций. Вместо этого предполагается известным поведение решений системы (1) с начальными условиями, принадлежащими границе ∂U такого открытого ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^n$, для которого указанное поведение легко устанавливается. Одним из основных геометрических методов доказательства существования T-периодических решений является принцип неподвижной точки. Наиболее удобное его применение связано с вычислением топологической степени $d_{\mathbb{R}^n}(I - P, U)$ некоторого вспомогательного оператора $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, неподвижные точки которого совпадают с начальными условиями T-периодических решений системы (1), относительно множества U и с проверкой отличия этой топологической степени от нуля. В качестве вспомогательного оператора используется оператор Пуанкаре $\mathcal{P}_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ставящий в соответствие каждой точке ξ значение единственного решения x системы (1) с начальным условием $x(0) = \xi$ в момент времени T.

Первая формула для вычисления топологической степени $d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U)$ для систем типа (1) получена М. А. Красносельским и А. И. Перовым (см. [18] и [40]) и связана с развитием результата И. Берштейна - А. Халаная [4]. Он основан на предположении о том, что множество U удовлетворяет условию невозвращаемости, то есть из границы ∂U этого множества исходят (в нулевой момент времени) только такие решения, которые не пересекают ∂U при всех $t \in (0, T]$. В этом случае М. А. Красносельским и А. И. Перо-

вым установлена формула $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^n}(-f(0,\cdot), U)$, позволившая легко считать $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon, U)$ и доказывать существование T-периодических решений для (1) во многих задачах, где метод малого параметра Пуанкаре ответа не дает, включая все те, где функция g всего лишь непрерывна. Модификация формулы Красносельского-Перова для так называемых m-систем получена Э. Мухамадиевым [38], при этом в левой части рассматриваемой формулы вместо ограниченного множества U берется некоторое бесконечно большое множество. Последним принципиальным результатом в этом направлении является работа А. Капетто, Ж. Мавена и Ф. Занолина [50], где установлено, что если система (2) автономна, то для справедливости формулы Красносельского-Перова достаточно требовать, чтобы ∂U не содержало начальных условий T-периодических решений системы (2).

Вторая формула для вычисления топологической степени $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon, U)$ получена Ж. Мавеном [64] и предполагает, что $f = 0$. Ж. Мавен установил, что если соответствующий оператор усреднения Φ^T Крылова-Боголюбова-Митропольского невырожден на ∂U, то $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U)$, не смотря на то, что $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_0, U)$ для рассматриваемой системы не определено. Полученная формула позволила доказать существование T-периодических решений во многих таких системах, где условия аналитических методов А. А. Андронова, Н. Г. Булгакова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского не выполнены. Варианты указанной формулы для различных случаев, в которых условия Ж. Мавена не выполнены, получены М. И. Каменским [12] на основе теоремы Красносельского-Крейна [17] (см. также [11], Гл. V, § 3) о предельном переходе под знаком интеграла. Развитие последней теоремы для систем с наследственностью сделано в работе В. В. Стрыгина [46], что позволило обосновать формулу Мавена и для таких систем.

Н. А. Бобылев и М. А. Красносельский заметили [6], что ни одна из рассмотренных формул не дает геометрического метода решения задач

И. Г. Малкина [29] и В. К. Мельникова [31] о существовании для системы (1) T-периодических решений с начальными условиями, принадлежащими окрестности T-периодического цикла $\widetilde{x}$ порождающей системы (2) в случае, когда последняя автономна (И. Г. Малкиным рассматривался случай изолированного цикла $\widetilde{x}$, а В. К. Мельниковым случай, когда цикл $\widetilde{x}$ вложен в некоторое семейство циклов порождающей системы). Указанное замечание обусловлено тем, что выбирая множество U лежащим в окрестности цикла $\widetilde{x}$ и удовлетворяющим условиям невозвращаемости, как правило, имеем равенство $d_{\mathbb{R}^n}(-f(0,\cdot),U)=0$. Использование же формулы Мавена возможно только при дополнительном предположении о том, что система (1) приводится к такой T-периодической системе типа (1), в которой $f=0$ (см. К. Шнайдер [71]). Последнее возможно в единственном случае, когда система (2), линеаризованная на $\widetilde{x}$, имеет только T-периодические решения, что естественным образом выполнено лишь для линейных систем (2). Возникает естественная проблема: разработать формулы вычисления топологической степени $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon,U)$ для более широких классов множеств U и порождающих систем (2), которые позволили бы получить геометрические методы решения задач И. Г. Малкина и В. К. Мельникова с одной стороны и превращались бы в формулы Красносельского-Перова и Мавена в рассмотренных ими ситуациях с другой стороны. Возможный вариант решения сформулированной проблемы предлагается в настоящей диссертационной работе.

Актуальность разработки указанных геометрических аналогов связана еще и с тем, что целый ряд полученных в последнее время математических моделей приводит к системам (1), в которых функция g не дифференцируема, например, асимметрический осциллятор Е. Н. Дансера [52], модель колебаний подвесных мостов А. С. Лазера-П. Дж. Маккенна [59] и другие.

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе рассматривается случай, когда система (1) имеет вид

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(t,x,\varepsilon), \tag{3}$$

и предполагается, что граница ∂U множества $U \subset \mathbb{R}^n$ содержит конечное число начальных условий T-периодических решений автономной порождающей системы

$$\dot{x} = f(x). \qquad (4)$$

Сначала разрабатывается формула для вычисления топологической степени $d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U)$ оператора Пуанкаре $\mathcal{P}_\varepsilon$ системы (3), затем даются приложения этой формулы к задаче о существовании в системе (3) T-периодических решений с принадлежащими множеству U начальными условиями. Хотя при этом предполагается, что оператор Пуанкаре $\mathcal{P}_\varepsilon$ для рассматриваемой системы определен при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ (то есть выполнено условие $(A_\mathcal{P})$ единственности и продолжимости на всю ось решений возмущенной системы с любым начальным условием), в главе даются аналоги полученных теорем для случая, когда указанное предположение не выполнено. В этом последнем случае вместо оператора Пуанкаре $\mathcal{P}_\varepsilon$ используется интегральный оператор

$$(Q_\varepsilon x)(t) = x(T) + \int\limits_0^t f(x(\tau))d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t g(\tau, x(\tau), \varepsilon)d\tau, \quad t \in [0, T],$$

и вместо топологической степени Брауера $d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U)$ – топологическая степень Лерэ-Шаудера $d_{C([0,T],\mathbb{R}^n)}(I - Q_\varepsilon, W_U)$, где множество $W_U \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ выбирается таким образом, чтобы множества U и W_U имели так называемую общую сердцевину (см. [21], Гл. 3, § 24) по отношению к T-периодическим решениям системы (3).

Основным ограничением, используемым в главе 1, является предположение о том, что каждый T-периодический цикл $\widetilde{x}$ системы (4) с начальным условием из ∂U является простым, то есть алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ системы

$$\dot{y} = f'(\widetilde{x}(t))y \qquad (5)$$

равна 1, что соответствует требованиям работы И. Г. Малкина [29]. В дис-

сертации показано, что вклад каждого такого цикла в величину топологической степени $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon, U)$ может быть посчитан (теорема 1.4) при помощи соответствующих бифуркационных функций Малкина

$$M_{\widetilde{x}}(\theta) = \mathrm{sign}\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0) \right\rangle \int\limits_0^T \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle\, d\tau,$$

где $\widetilde{z}$ – произвольное нетривиальное T-периодическое решение системы $\dot{z} = -(f'_x(\widetilde{x}(t)))^* z$. В случае, когда ∂U не содержит начальных условий T-периодических циклов системы (4), установленная в теореме 1.4 формула (1.60) для вычисления $d_{\mathbb{R}^n}(I-\mathcal{P}_\varepsilon, U)$ совпадает с формулой Красносельского-Перова. Однако, в покрываемом теоремой 1.4 классе множеств U уже имеются такие, использование которых в формуле (1.60) позволяет получить геометрический вариант решения задачи И. Г. Малкина [29] о существовании T-периодических решений в системах (3) вблизи цикла $\widetilde{x}$ (теорема 1.6), которое, согласно замечанию Бобылева-Красносельского, не может быть получено на основании формулы Красносельского-Перова.

Во второй главе рассматриваются системы общего вида (1) в предположении, что $\mathcal{P}_0(\xi) = \xi$ для любого $\xi \in \partial U$. Оказывается (теорема 2.2), выполнения указанного предположения для справедливости формулы Мавена достаточно (из условий Мавена следует, что $\mathcal{P}_0(\xi) = \xi$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$), если только так называемый обобщенный оператор усреднения $\Phi^s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ невырожден на ∂U при всех $s \in [0, T]$. Оператор Φ^s впервые указан в работе М. И. Каменского-О. Ю. Макаренкова-П. Нистри [13] и совпадает при $s = T$ с классическим оператором усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского, входящим в формулу Мавена. Распространение формулы Мавена на такой значительно более широкий класс множеств U позволило получить новые теоремы о существовании для системы (1) T-периодических решений вблизи ∂U (теоремы 2.4, 2.5 и 2.6). При этом, в теоремах 2.5 и 2.6 рассматривается случай системы (3), заданной в пространстве $\mathbb{R}^2$, и в качестве множества U берется внутренность T-периодического цикла $\widetilde{x}$ си-

стемы (4). Указанный выбор множества U вместе с доказанной в главе 2 формулой для $\Phi^s(\widetilde{x}(t))$, дающей разложение вектора $\Phi^s(\widetilde{x}(t))$ по векторам $\dot{\widetilde{x}}(t)$ и $\widehat{y}(t)$ (лемма 2.4), где $\widehat{y}$ – линейно независимое с $\dot{\widetilde{x}}$ решение системы (5), позволил получить геометрический метод решения задачи В. К. Мельникова (теорема 2.6). Одним из преимуществ полученного метода, по сравнению с методом Мельникова, является то, что он дает существование для возмущенной системы (3) двух T-периодических решений, лежащих по разные стороны от порождающего цикла $\widetilde{x}$. Работа предложенного метода проиллюстрирована на примерах уравнения Дуффинга (пример 2.1), системы Гринспана-Холмса (пример 2.2) и одной его модификации, в которой порождающий цикл $\widetilde{x}$ вырожден в том смысле, что все решения системы (5) являются T-периодическими (пример 2.3). При этом для вычисления степени $d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U)$ используется разработанный в этой же главе метод, связанный с некоторыми предположениями типа четности поля Φ^T, используемыми в теоремах Борсука-Улама [47].

В третьей главе изучаются свойства T-периодических решений возмущенных систем (1) и (3), связанные со скоростью их сходимости при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – сходящаяся к нулю последовательность значений параметра системы (1) и $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – соответствующая последовательность T-периодических решений этой системы такая, что

$$x_k(t) \to \widetilde{x}(t) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{6}$$

где $\widetilde{x}$ – T-периодическое решение порождающей системы (2). Обозначим через $\Omega(\cdot, t_0, \xi)$ решение x порождающей системы (2) такое, что $x(t_0) = \xi$. Доказанная в главе 3 альтернатива (теорема 3.1) утверждает, что либо начальные условия T-периодических решений системы (1) сходятся к начальному условию $\widetilde{x}(0)$ порождающего решения $\widetilde{x}$ вдоль плоскости $\left\{l \in \mathbb{R}^n : \left(\Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(0)) - I\right) l = 0\right\}$, либо сходимость имеет скорость $\varepsilon > 0$. При этом, в последнем случае описание поведения решений x_k при $k \to \infty$

может быть уточнено на основании обобщенного оператора усреднения Φ^s.

Если функция g непрерывно дифференцируема, и свойство (6) получено применением теорем И. Г. Малкина [29], то сходимость в (6) со скоростью ε_k уже гарантирована, и теорема 3.1 ничего нового не дает. Однако, если функция g всего лишь непрерывна, или свойство (6) получено иными методами, например, методом Мельникова [31] или при помощи теорем глав 1 и 2, то теоремы о скорости сходимости в (6) в литературе отсутствуют, и теорема 3.1 частично заполняет этот пробел. Полный ответ об асимптотике расстояния между траекториями решений x_k и $\widetilde{x}$ в случае, когда функция g непрерывна, дает теорема 3.2 обсуждаемой главы, но в последней теореме дополнительно предполагается, что система (1) имеет вид (3), и $\widetilde{x}$ является простым циклом. При этом одно из следствий теоремы 3.1 (следствие 3.7) дает условия, при которых расстояния между траекториями решений x_k и $\widetilde{x}$ стремится к нулю со скоростью большей, чем ε_k.

Каждая глава завершается сопоставлением полученных утверждений с имеющимися в литературе.

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих семинарах: академика Д. В. Аносова и профессора Ю. С. Ильяшенко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2006), профессора Ж. Мавена (университет г. Леувен-ла-Нуов, Бельгия, 2005), профессора П. Нистри (университет г. Сиены, Италия, 2005), профессора А. И. Перова (ВГУ, Воронеж, 2005), профессора Н. Хирано (университет г. Йокогамы, Япония, 2004), НОЦ "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах"(ВГУ, Воронеж, 2004), а также на следующих международных конференциях: Barcelona Conference in Planar Vector Fields (Барселона, Испания, 2006), "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования"(Воронеж, 2005), "Trends in Differential Equations and Dynamical Systems"(Реджио Эмилья, Италия, 2005), "12th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems"(Евора, Португа-

лия, 2004), "International Symposium on Dynamical Systems Theory and Its Applications to Biology and Environmental Sciences"(Хамаматсу, Япония, 2004).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантом РФФИ № 05-01-00100, а также грантом для молодых участников проекта VZ–010 "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах" Минобразования РФ и CRDF (США).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [13], [24]-[28], [56], [61]-[63]. Из совместных работ [13, 56] в диссертацию вошли только принадлежащие Макаренкову О. Ю. результаты.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Каменскому Михаилу Игоревичу за постановку задачи, обсуждение результатов и организацию работы над диссертацией.

Глава 1

Возмущения систем, у которых пересечение множества начальных условий T-периодических решений и границы некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ конечно

В настоящей главе исследуется существование T-периодических решений в системах вида

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{1.1}$$

начальные условия которых принадлежат такому открытому ограниченному множеству $U \subset \mathbb{R}^n$, граница которого содержит конечное число начальных условий T-периодических решений порождающей системы

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.2}$$

На протяжении всей главы, если другое не оговорено дополнительно, предполагается, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемая и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ – непрерывная функции. Разработке методов решения сформулированной задачи и их приложениям предпошлем некоторые определения и свойства, которые будут многократно использоваться на протяжении этой и последующих глав.

1.1 Предварительные сведения

1.1.1 Основные обозначения. Через $0_{m\times k}$ обозначается нулевая $m\times k$-матрица и через $(a_1,...,a_k)$, где $a_i\in\mathbb{R}^m$, – $m\times k$-матрица, столбцы которой суть векторы $a_1,...,a_k$. Введенное обозначение в настоящей диссертации не приводит к путанице с обозначением интервала (θ_1,θ_2), где $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$. Всюду $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Если $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $K\subset\mathbb{R}^n$ – компактное множество, то $\rho(\xi,K)$ – расстояние от ξ до K, то есть $\rho(\xi,K)=\min_{\zeta\in K}\|\xi-\zeta\|$. $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ - это пространство всех непрерывных функций, действующих из $[0,T]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$. Функция $o(\varepsilon)$, используемая в настоящей диссертационной работе, обладает всегда тем свойством, что $o(\varepsilon)/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. При этом, функция o может зависеть и от других переменных, такие переменные в записи o опускаются, если указанная сходимость к нулю имеет место равномерно по ним. Через $B_\delta(V)$ обозначается δ-окрестность множества V, а через ∂V – его граница в норме содержащего V пространства. Если $f:V\to V_1$ – некоторая функция, то $f(V)=\cup_{\xi\in V}f(\xi)$ и $f'_{(i)}$ – производная функции f по i-й переменной. Тот факт, что равенство $f(\xi)=\xi$ справедливо при всех $\xi\in V$ записывается как $f(\xi)=\xi,\ \xi\in V$. Запись $\{\xi_1,\xi_2\}$ означает множество, состоящее из двух элементов ξ_1 и ξ_2.

1.1.2 Основные определения и свойства. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=F(t,x), \tag{1.3}$$

где $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – непрерывная функция.

Некоторые из приводимых ниже определений намечены во введении, сейчас они формулируются со всей строгостью (см. М. А. Красносельский [20]).

Определение 1.1 *Если решение $x_{t_0,\xi}$ системы (1.3) с начальным условием $x_{t_0,\xi}(t_0)=\xi$ существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0,T]$ при*

любых $t_0 \in [0,T]$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *то оператор* Ω, *определяемый для* $(t, t_0, \xi) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *как*

$$\Omega(t, t_0, \xi) = x_{t_0,\xi}(t),$$

называется оператором сдвига по траекториям системы (1.3).

Определение 1.2 *Пусть правая часть системы (1.3) T-периодична по первой переменной. Если решение x системы (1.3) с начальным условием $x(t_0) = \xi$ существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0,T]$ при любых $t_0 \in [0,T]$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, то оператор*

$$\mathcal{P}(\xi) = \Omega(T, 0, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

называется оператором Пуанкаре T-периодической системы (1.3).

Определение 1.3 *Если система (1.3) является T-периодической, то интегральным оператором, соответствующим задаче о T-периодических решениях для (1.3), называется оператор $Q : C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n)$, задаваемый как*

$$(Qx)(t) = x(T) + \int\limits_0^t F(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Определение 1.4 *T-периодические решения T-периодической системы (1.3) будем отождествлять с неподвижными точками интегрального оператора, соответствующего задаче о T-периодических решениях для (1.3).*

Напомним, что траекторией решения x системы (1.3) называется образ отображения $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (см. В. И. Арнольд [2], с. 11).

Систематически будет использоваться нижеследующая лемма 1.1, связанная с возмущенной системой

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{1.4}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемая и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функции, $\varepsilon > 0$ – параметр. Предположим, что $f(t+T,\xi) = f(t,\xi)$ и $g(t+T,\xi,\varepsilon) = g(t,\xi,\varepsilon)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in [0,1]$. Пусть Ω – оператор сдвига по траекториям системы (1.4) при $\varepsilon = 0$.

Лемма 1.1 *Функция $x \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ является T-периодическим решением системы (1.4) тогда и только тогда, когда функция*

$$\nu(t) = \Omega(0,t,x(t)),\ t \in [0,T], \tag{1.5}$$

является решением системы

$$\dot{\nu} = \varepsilon\Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\nu))g(t,\Omega(t,0,\nu),\varepsilon),$$

удовлетворяющим условию $\nu(0) = \Omega(T,0,\nu(T))$.

Доказательство. Произведем в системе (1.4) замену переменных

$$x(t) = \Omega(t,0,\nu(t)). \tag{1.6}$$

Формула (1.6) каждому $\nu \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие $x \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно, и обратное отображение дается формулой (1.5). Следовательно, функция x является решением системы (1.4) тогда и только тогда, когда функция ν, введенная по закону (1.5), удовлетворяет следующему равенству

$$\Omega'_{(1)}(t,0,\nu(t)) + \Omega'_{(3)}(t,0,\nu(t))\dot{\nu}(t) = \varepsilon g(t,\Omega(t,0,\nu(t)),\varepsilon) + \\ + f(t,\Omega(t,0,\nu(t))). \tag{1.7}$$

По определению функции Ω имеем

$$\Omega'_{(1)}(t,0,\nu(t)) = f(t,\Omega(t,0,\nu(t))). \tag{1.8}$$

Пользуясь соотношением (1.8), система (1.7) может быть переписана в виде

$$\dot{\nu}(t) = \varepsilon\Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\nu(t)))g(t,\Omega(t,0,\nu(t)),\varepsilon). \tag{1.9}$$

Рассмотрим произвольное T-периодическое решение x системы (1.4). Имеем

$$\nu(0) = \Omega(0, 0, x(0)) = x(0) = x(T) = \Omega(T, 0, \nu(T)).$$

Лемма доказана.

1.2 Связь функций Малкина и топологической степени оператора, соответствующего задаче о T-периодических решениях с начальными условиями в U

Пусть Ω – оператор сдвига по траекториям системы (1.2). Основное предположение настоящей главы следующее:

(A_0) множество

$$\mathfrak{S}^U = \bigcup_{\xi \in \partial U : \Omega(T,0,\xi)=\xi} \{x \in C([0,T], \mathbb{R}^n) : x(t) = \Omega(t, 0, \xi),\ t \in [0,T]\}$$

конечно, и для каждого $\widetilde{x} \in \mathfrak{S}^U$ алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ системы

$$\dot{y} = f'_x(\widetilde{x}(t))y \tag{1.10}$$

равна 1. Однако ряд теорем на пути к основному результату предполагает более слабые условия.

Предположение (A_0) характерно для случая, когда U является окрестностью в $\mathbb{R}^n$ некоторой точки $\widetilde{x}(\theta)$ изолированного цикла $\widetilde{x}$ системы (1.2), подробно изученного И. Г. Малкиным в [29]. В настоящей главе будет, в частности, установлен ряд обобщений результата И. Г. Малкина.

Определение 1.5 *Циклы $\widetilde{x}$ порождающей системы (1.2) такие, что алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ линейной системы (1.10) равна* 1, *будем называть простыми.*

Пусть $Q_\varepsilon : C([0,T],\mathbb{R}^n) \to C([0,T],\mathbb{R}^n)$ – интегральный оператор, соответствующий задаче о T-периодических решениях для системы (1.1), и

$$W_U = \{\widehat{x} \in C([0,T],\mathbb{R}^n) : \Omega(0,t,\widehat{x}(t)) \in U,\ t \in [0,T]\}.$$

Каждому простому циклу $\widetilde{x}$ может быть поставлена в соответствие бифуркационная функция Малкина (см. [29], формула 3.13)

$$M_{\widetilde{x}}(\theta) = \mathrm{sign}\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0)\right\rangle \int\limits_0^T \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau),0)\rangle\, d\tau, \qquad (1.11)$$

где $\widetilde{z}$ – произвольное нетривиальное T-периодическое решение системы

$$\dot{z} = -(f'_x(\widetilde{x}(t)))^* z. \qquad (1.12)$$

Всюду ниже через $\beta(\widetilde{x})$ обозначается число, равное сумме кратностей больших $+1$ мультипликаторов системы (1.10).

Для достижения основного результата главы теорем 1.3-1.4 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, которые, однако, могут иметь самостоятельный интерес для теории топологической степени. Первое из них следующее.

Теорема 1.1 *Пусть $\widetilde{x}$ – простой T-периодический цикл системы (1.2). Пусть $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \theta_1 + \frac{T}{p}$, где $p \in \mathbb{N}$ и $\frac{T}{p}$ – наименьший период цикла $\widetilde{x}$. Предположим, что $M_{\widetilde{x}}(\theta_1) \neq 0$ и $M_{\widetilde{x}}(\theta_2) \neq 0$. Тогда для заданного $\alpha > 0$ существует $\delta_0 > 0$ и семейство открытых множеств $\{V_\delta\}_{\delta\in(0,\delta_0]}$, удовлетворяющих свойствам:*

1) $\widetilde{x}((\theta_1,\theta_2)) \subset V_\delta \subset B_\delta(\widetilde{x}((\theta_1,\theta_2)))$,

2) $\partial V_\delta \cap \widetilde{x}([\theta_1,\theta_2]) = \{\widetilde{x}(\theta_1), \widetilde{x}(\theta_2)\}$,

такие, что для любого $\delta \in (0,\delta_0]$ и любого $\varepsilon \in (0,\delta^{1+\alpha}]$ степень $d(I - Q_\varepsilon, W_{V_\delta})$ определена и может быть найдена по следующей формуле

$$d(I - Q_\varepsilon, W_{V_\delta}) = -(-1)^{\beta(\widetilde{x})} d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1,\theta_2)). \qquad (1.13)$$

Введем некоторые дополнительные понятия и утверждения необходимые для доказательства теоремы. Пусть $\widetilde{x}$ – простой цикл системы (1.2), тогда существует (см. [11], § 20, лемма 1) фундаментальная матрица $Y(t)$ системы (1.10) вида

$$Y(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda t} & 0_{n-1\times 1} \\ 0_{1\times n-1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где Φ – T-периодическая матрица Флоке и Λ – постоянная $(n-1)\times(n-1)$-матрица с собственными значениями отличными от 0. Для k-й компоненты вектора $\zeta \in \mathbb{R}^n$ в дальнейшем используется обозначение ζ^k или $[\zeta]^k$. Для любого $\delta > 0$ определим множество $C_\delta \subset \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$C_\delta = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^n : \|P_{n-1}\zeta\| < \delta,\ \zeta^n \in \left(-\frac{\theta_2-\theta_1}{2}, \frac{\theta_2-\theta_1}{2} \right) \right\},$$

где

$$P_{n-1}\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Gamma : B_\Delta(C_\delta) \to \Gamma(B_\Delta(C_\delta))$, $\Delta > 0$, задается формулой

$$\Gamma(\zeta) = \frac{Y(\zeta^n + \overline{\theta})}{\|Y\|_{[0,T]}} P_{n-1}\zeta + \widetilde{x}(\zeta^n + \overline{\theta}),$$

где

$$\overline{\theta} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \quad \text{и} \quad \|Y\|_{[0,T]} = \max_{\theta\in[0,T]} \|Y(\theta)\|.$$

Справедливы следующие предварительные свойства.

Лемма 1.2 *Для всех $\theta \in [0,T]$ и всех $\zeta \in \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение $\langle Y(\theta)P_{n-1}\zeta, \widetilde{z}(\theta)\rangle = 0$. Обратно, если $\langle \xi, \widetilde{z}(\theta)\rangle = 0$, то существует $\zeta \in \mathbb{R}^n$ такое, что $\langle Y(\theta)P_{n-1}\zeta, \widetilde{z}(\theta)\rangle = 0$.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим следующий вектор

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta.$$

По лемме Перрона (см. [68] или [11], Гл. III, § 12) имеем

$$\left\langle Y(\theta+T)P_{n-1}\widehat{\zeta}, \widetilde{z}(\theta)\right\rangle = \left\langle Y(\theta)P_{n-1}\widehat{\zeta}, \widetilde{z}(\theta)\right\rangle \quad \text{для всех } \theta \in [0,T].$$

Следовательно,

$$0 = \left\langle \left(Y(\theta) - Y(\theta+T)\right) P_{n-1}\widehat{\zeta}, \widetilde{z}(\theta)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \Phi(\theta) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda\theta}\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_{n-1}\widehat{\zeta}, \widetilde{z}(\theta)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \Phi(\theta) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_{n-1}\zeta, \widetilde{z}(\theta)\right\rangle = \langle Y(\theta)P_{n-1}\zeta, \widetilde{z}(\theta)\rangle$$

для любого $\theta \in [0,T]$, что является первым утверждением леммы 1.2. Чтобы доказать второе утверждение леммы, положим

$$L_\xi = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, \widetilde{z}(\theta)\rangle = 0\right\}, \quad L_\zeta = \bigcup_{\zeta\in\mathbb{R}^n} Y(\theta)P_{n-1}\zeta.$$

Заметим, что L_ξ и L_ζ являются линейными подпространствами пространства $\mathbb{R}^n$, и $\dim L_\xi = n-1$. Так как $Y(\theta)P_{n-1}$ является линейным невырожденным отображением, действующим из $P_{n-1}\mathbb{R}^n$ в $Y(\theta)P_{n-1}\mathbb{R}^n$, то $\dim L_\zeta = \dim P_{n-1}\mathbb{R}^n = n-1$. Но, согласно первому утверждению леммы, $L_\xi \supset L_\zeta$ и значит, можно заключить, что $L_\xi = L_\zeta$.

Лемма доказана.

Лемма 1.3 *Для любого* $\Delta \in (0, \Delta_0]$ *и любого* $\delta \in (0, \delta_0]$ *отображение* Γ *является гомеоморфизмом* $B_\Delta(C_\delta)$ *на* $\Gamma(B_\Delta(C_\delta))$ *при условии, что* $\Delta_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *достаточно малы. Более того, множество* $\Gamma(B_\Delta(C_\delta))$ *открыто в* $\mathbb{R}^n$, *и* Γ^{-1} *непрерывно дифференцируемо на множестве* $\Gamma(B_\Delta(C_\delta))$.

Доказательство. Очевидно, что Γ непрерывно. Покажем, что $\Gamma : B_\Delta(C_\delta) \to \Gamma(B_\Delta(C_\delta))$ инъективно для достаточно малых $\Delta > 0$ и $\delta > 0$. Для этого предположим противное, тогда существуют $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $a_k \neq b_k$, $a_k \to a_0$, $b_k \to b_0$ при $k \to \infty$,

$$P_{n-1}a_0 = P_{n-1}b_0 = 0, \tag{1.15}$$

такие, что

$$\frac{Y(a_k^n)}{\|Y\|_{[0,T]}}(P_{n-1}a_k) + \widetilde{x}(a_k^n) = \frac{Y(b_k^n)}{\|Y\|_{[0,T]}}(P_{n-1}b_k) + \widetilde{x}(b_k^n). \tag{1.16}$$

Без ограничения общности можем считать, что либо $a_k^n = b_k^n$ для любого $k \in \mathbb{N}$, либо $a_k^n \neq b_k^n$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $a_k^n = b_k^n$ для любого $k \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$Y(a_k^n)(P_{n-1}a_k - P_{n-1}b_k) = 0 \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N},$$

и, таким образом,

$$P_{n-1}a_k = P_{n-1}b_k \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N},$$

противореча тому свойству, что $a_k \neq b_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь случай когда $a_k^n \neq b_k^n$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Так как из (1.16) имеем, что $\widetilde{x}(a_0^n) = \widetilde{x}(b_0^n)$ и (по предположению теоремы 1.1) $|a_0^n - b_0^n| < \frac{T}{p}$, где $\frac{T}{p}$ – наименьший период цикла $\widetilde{x}$, то $a_0^n = b_0^n =: \theta_0$. Используя лемму 1.2, из (1.16) имеем

$$\langle \widetilde{x}(a_k^n) - \widetilde{x}(b_k^n), \widetilde{z}(a_k^n) \rangle = \left\langle \frac{Y(b_k^n)}{\|Y\|_{[0,T]}} P_{n-1}b_k^n, \widetilde{z}(a_k^n) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{Y(b_k^n) - Y(a_k^n)}{\|Y\|_{[0,T]}} P_{n-1}b_k^n, \widetilde{z}(a_k^n) \right\rangle,$$

или, после деления на $a_k^n - b_k^n$,

$$\left\langle \frac{\widetilde{x}(a_k^n) - \widetilde{x}(b_k^n)}{a_k^n - b_k^n}, \widetilde{z}(a_k^n) \right\rangle = -\frac{1}{\|Y\|_{[0,T]}} \left\langle \frac{Y(a_k^n) - Y(b_k^n)}{a_k^n - b_k^n} P_{n-1}b_k^n, \widetilde{z}(a_k^n) \right\rangle.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в предыдущем равенстве и учитывая, что $P_{n-1}b_k^n \to 0$ при $k \to \infty$, получаем

$$\left\langle \dot{\widetilde{x}}(\theta_0), \widetilde{z}(\theta_0) \right\rangle = 0,$$

что является противоречием (см. [30], Гл. III, формула 12.9). Следовательно, существуют $\Delta_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что отображение $\Gamma : B_\Delta(C_\delta) \to \Gamma(B_\Delta(C_\delta))$

инъективно для $\Delta \in (0, \Delta_0]$ и $\delta \in (0, \delta_0]$. Покажем, что $\Delta_0 >$ и $\delta_0 > 0$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\Gamma(B_\Delta(C_\delta)) \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \text{ для любых } \Delta \in (0, \Delta_0] \text{ и } \delta \in (0, \delta_0]. \tag{1.17}$$

Заметим, что для любого $\zeta \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $P_{n-1}\zeta = 0$, имеем

$$\Gamma'(\zeta) = \frac{1}{\|Y\|_{[0,T]}} \Phi\left(\zeta^n + \overline{\theta}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda(\zeta^n + \overline{\theta})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \dot{\tilde{x}}(\zeta^n + \overline{\theta}) \end{pmatrix}$$

и, таким образом, для любого $\zeta \in \mathbb{R}^n$ такого, что $P_{n-1}\zeta = 0$ производная $\Gamma'(\zeta)$ обратима. Следовательно, без ограничения общности можем считать, что $\Delta_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ достаточно малы так, что линейное отображение $\Gamma'(\zeta)$ обратимо для любого $\zeta \in B_\Delta(C_\delta)$ с $\Delta \in (0, \Delta_0]$ и $\delta \in (0, \delta_0]$. По теореме об обратной функции (см. [70], теорема 9.17) имеем, что Γ локально обратимо на $B_\Delta(C_\delta)$ при $\Delta \in (0, \Delta_0]$ и $\delta \in (0, \delta_0]$, то есть оно переводит любую достаточно малую окрестность (в $\mathbb{R}^n$) элемента ζ в открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, что, в свою очередь, означает (1.17). Более того, из теоремы об обратном отображении следует, что Γ^{-1} непрерывно дифференцируемо в $\Gamma(B_\Delta(C_\delta))$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Прежде всего заметим, что если x – решение уравнения $x = Q_\varepsilon x$, то в силу леммы 1.1 $\nu(t) = \Omega(0, t, x(t))$ – решение уравнения $\nu = G_\varepsilon \nu$, где $G_\varepsilon : C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n)$ определяется как

$$(G_\varepsilon \nu)(t) = \Omega(T, 0, \nu(T)) +$$
$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \left(\Omega'_{(3)}(\tau, 0, \nu(\tau))\right)^{-1} g(\tau, \Omega(\tau, 0, \nu(\tau)), \varepsilon) d\tau.$$

Более того, так как для любого открытого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм $(Sx)(t) = \Omega(0, t, x(t))$ отображает каждую окрестность множества W_V в окрестность множества

$$\widehat{W}_V = \{u \in C([0,T], \mathbb{R}^n) : u(t) \in V, \text{ для любого } t \in [0,T]\},$$

то (см. [21], теорема 26.4) имеем, что

$$d(I - Q_\varepsilon, W_{\Gamma(C_\delta)}) = d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$$

в случае, если $d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ определен. Чтобы доказать, что $d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ определен, рассмотрим векторное поле

$$A_\varepsilon(\xi) = x'_{(2)}\left(T - \varepsilon\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n\right), \widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n + \overline{\theta}\right)\right) \circ$$

$$\circ\left(\xi - \widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n + \overline{\theta}\right)\right) +$$

$$+\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n + \overline{\theta} - \varepsilon\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n\right)\right), \qquad \xi \in \Gamma(B_\Delta(C_\delta)),$$

где $\Gamma, \Delta, \delta > 0$ – те, о которых говорится в лемме 1.3, и $\widetilde{M} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определено как

$$\widetilde{M}(t) = \begin{cases} |t|, & \text{если } M_{\widetilde{x}}(\theta_1) < 0 \text{ и } M_{\widetilde{x}}(\theta_2) < 0, \\ -|t|, & \text{если } M_{\widetilde{x}}(\theta_1) > 0 \text{ и } M_{\widetilde{x}}(\theta_2) > 0, \\ -d_{\mathbb{R}}\left(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1, \theta_2)\right) \cdot t, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь докажем, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ и любого $\varepsilon \in (0, \delta^{1+\alpha}]$ топологические степени $d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ и $d_{\mathbb{R}^n}(I - A_\varepsilon, \Gamma(C_\delta))$ определены и

$$d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)}) = d_{\mathbb{R}^n}(I - A_\varepsilon, \Gamma(C_\delta)). \tag{1.18}$$

Для этого определим вспомогательное векторное поле $\widehat{A}_\varepsilon : C([0,T], \mathbb{R}^n) \to C([0,T], \mathbb{R}^n)$, полагая $(\widehat{A}_\varepsilon \nu)(t) = A_\varepsilon(\nu(T))$ для любого $t \in [0,T]$ и любого $\nu \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$. Так как $\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)} \cap \mathbb{R}^n = \Gamma(C_\delta)$, то по теореме о сужении (см. [21], теорема 27.1) степень $d_{\mathbb{R}^n}(I - A_\varepsilon, \Gamma(C_\delta))$ определена, если только определена степень $d(I - \widehat{A}_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$, более того, $d_{\mathbb{R}^n}(I - A_\varepsilon, \Gamma(C_\delta)) = d(I - \widehat{A}_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$. Следовательно, желательно показать, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ и любого $\varepsilon \in (0, \delta^{1+\alpha}]$ топологические степени $d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ и $d(I - \widehat{A}_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ определены и

$$d(I - G_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)}) = d(I - \widehat{A}_\varepsilon, \widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)}). \tag{1.19}$$

Чтобы доказать (1.19), определим $F_\varepsilon : C([0,T],\mathbb{R}^n) \to C([0,T],\mathbb{R}^n)$ как

$$(F_\varepsilon \nu)(t) = \int\limits_0^t \left(\Omega'_{(3)}(\tau,0,\nu(\tau))\right)^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\nu(\tau)),\varepsilon)d\tau, \quad t\in[0,T],$$

и рассмотрим линейную деформацию

$$\begin{aligned} D_\varepsilon\big(\lambda,\nu\big)(t) = \lambda\big(\nu(t) - \Omega(T,0,\nu(T)) - \varepsilon(F_\varepsilon\nu)(t)\big) + \\ +(1-\lambda)\left(\nu(t) - \left(\widehat{A}_\varepsilon \nu\right)(t)\right), \end{aligned}$$

где $\lambda\in[0,1],\ u\in\partial\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)},\ \delta\in(0,\delta_0)$. Эквивалентно

$$\begin{aligned} D_\varepsilon(\lambda,\nu)(t) = \lambda\left(\nu(t) - \Omega(T,0,\nu(T))\right) + (1-\lambda)\nu(t) - \\ -(1-\lambda)x'_{(2)}\left(T-\varepsilon\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu(T))\right]^n\right), R_{\widetilde{x}}(\nu(T))\right)\left(\nu(T)-R_{\widetilde{x}}(\nu(T))\right) - \\ -\lambda\varepsilon(F_\varepsilon\nu)(t) - (1-\lambda)\,\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu(T))\right]^n + \overline{\theta} - \varepsilon\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu(T))\right]^n\right)\right), \end{aligned}$$

где $\lambda\in[0,1],\ \nu\in\partial\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)},\ \delta\in(0,\delta_0)$ и

$$R_{\widetilde{x}}(\xi) = \widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n + \overline{\theta}\right).$$

Покажем, что для всех достаточно малых $\delta\in(0,\delta_0]$, $\varepsilon\in(0,\delta^{1+\alpha}]$ и каждых $\lambda\in[0,1]$, $\nu\in\partial\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)}$. Предположим противное, значит существуют $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+$, $\delta_k\to0$ при $k\to\infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_k\in(0,\delta_k^{1+\alpha})$, $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\nu_k\in\partial\widehat{W}_{\Gamma(C_{\delta_k})}$, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$ такие, что

$$\begin{aligned} 0 =&\lambda_k\left(\nu_k(t) - \Omega(T,0,\nu_k(T))\right) + (1-\lambda_k)\nu_k(t) - \\ &- (1-\lambda_k)x'_{(2)}\left(T-\varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\circ \\ &\circ\left(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right) - \lambda_k\varepsilon_k(F_{\varepsilon_k}\nu_k)(t) - \\ &- (1-\lambda_k)\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta} - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right)\right). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Из (1.20) имеем

$$\begin{aligned} \nu_k(t) =&\lambda_k\Omega(T,0,\nu_k(T)) + \\ &+ (1-\lambda_k)x'_{(2)}\left(T-\varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\circ \\ &\circ\left(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right) + \lambda_k\varepsilon_k(F_{\varepsilon_k}\nu_k)(t) + \\ &+ (1-\lambda_k)\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta} - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right)\right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\dot\nu_k(t) = \lambda_k\varepsilon_k \left(\Omega'_{(3)}(t,0,\nu_k(t))\right)^{-1} g(t,\Omega(t,0,\nu_k(t)),\varepsilon_k). \qquad (1.21)$$

Из (1.21) следует, что без ограничения общности можно предположить существование $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$\nu_k(t) \to \xi_0 \text{ при } k \to \infty$$

равномерно по отношению к $t \in [0,T]$. Так как $\nu_k(0) \in \Gamma(C_{\delta_k}) \in B_{\delta_k}(\widetilde{x}([\theta_1,\theta_2]))$, то $\xi_0 \in \widetilde{x}([\theta_1,\theta_2])$. Теперь, чтобы получить противоречие, возьмем $t = T$ и перепишем (1.20) в виде

$$0 = \lambda_k\left(\nu_k(T) - \Omega(T,0,\nu_k(T))\right) + (1-\lambda_k)\nu_k(T) -$$

$$-(1-\lambda_k)\Omega'_{(3)}\left(T - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), 0, R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\circ$$

$$\circ(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))) - \lambda_k\varepsilon_k(F_{\varepsilon_k}\nu_k)(T) -$$

$$-(1-\lambda_k)\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta} - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right)\right) =$$

$$= \lambda_k\left(\nu_k(T) - \Omega(T,0,\nu_k(T))\right) +$$

$$+(1-\lambda_k)\left(I - \Omega'_{(3)}\left(T - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), 0, R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\right)\circ$$

$$\circ(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))) - \lambda_k\varepsilon_k(F_{\varepsilon_k}\nu_k)(T) + (1-\lambda_k)R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)) -$$

$$-(1-\lambda_k)\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta} - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right)\right) =$$

$$= \lambda_k\left(\nu_k(T) - \Omega(T,0,\nu_k(T))\right) + (1-\lambda_k)\circ$$

$$\circ\left(I - \Omega'_{(3)}\left(T - \varepsilon_k\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), 0, R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\right)\circ$$

$$\circ(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))) - \lambda_k\varepsilon_k(F_{\varepsilon_k}\nu_k)(T) +$$

$$+\varepsilon_k(1-\lambda_k)\dot{\widetilde{x}}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right)\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right) + o(\varepsilon_k).$$

Таким образом, замечая, что

$$\Omega(T,0,\xi) - \xi = \Omega(T,0,\xi) - R_{\widetilde{x}}(\xi) + R_{\widetilde{x}}(\xi) - \xi =$$

$$= \Omega(T,0,R_{\widetilde{x}}(\xi) + (\xi - R_{\widetilde{x}}(\xi))) - R_{\widetilde{x}}(\xi) + R_{\widetilde{x}}(\xi) - \xi =$$

$$= \Omega'_{(3)}(T,0,R_{\widetilde{x}}(\xi))(\xi - R_{\widetilde{x}}(\xi)) - (\xi - R_{\widetilde{x}}(\xi)) + o(\xi - R_{\widetilde{x}}(\xi)) =$$
$$= \left(\Omega'_{(3)}(T,0,R_{\widetilde{x}}(\xi)) - I\right)(\xi - R_{\widetilde{x}}(\xi)) + o(\xi - R_{\widetilde{x}}(\xi)),$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\lambda_k \left(I - \Omega'_{(3)}(T,0,R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)))\right)(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))) - \\
&- \lambda_k o(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))) + (1-\lambda_k)\circ \\
&\circ \left(I - \Omega'_{(3)}\left(T - \varepsilon_k \widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), 0, R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\right)\circ \\
&\circ (\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))) - \lambda_k\varepsilon_k(F_{\varepsilon_k}\nu_k)(T) + o(\varepsilon_k) + \\
&+ \varepsilon_k(1-\lambda_k)\dot{\widetilde{x}}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right)\widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Можно считать, что последовательности $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\left\{\dfrac{\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходятся, пусть $\lambda_0 = \lim_{k\to\infty}\lambda_k$ и $l_0 = \lim_{k\to\infty}\dfrac{\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|}$. Так как $\nu_k \in \partial\widehat{W}_{\Gamma(C_{\delta_k})}$, то существует $t_k \in [0,T]$ такое, что $\nu_k(t_k) \in \partial\Gamma(C_{\delta_k})$. Положим $\zeta_k = \Gamma^{-1}(\nu_k(t_k))$, без ограничения общности можем предполагать, что либо

$$\zeta_k^n + \overline{\theta} \in (\theta_1, \theta_2) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}, \tag{1.23}$$

либо

$$\zeta_k^n + \overline{\theta} \in \{\theta_1\} \cup \{\theta_2\} \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Покажем, что случай (1.23) невозможен. По лемме 1.3, Γ является гомеоморфизмом множества C_{δ_k} на $\Gamma(C_{\delta_k})$ для достаточно малых $\Delta > 0$, и $\nu_k(t_k) \in \partial\Gamma(C_{\delta_k})$, значит

$$\zeta_k = \Gamma^{-1}(\nu_k(t_k)) \in \partial C_{\delta_k}. \tag{1.25}$$

Следовательно, (1.23) и (1.25) влекут

$$\|P_{n-1}\zeta_k\| = \delta_k \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Так как

$$\|P_{n-1}\zeta_k\| = \|Y^{-1}(\theta)Y(\theta)P_{n-1}\zeta_k\| \le \|Y^{-1}(\theta)\|\|Y(\theta)P_{n-1}\zeta_k\|,$$

то существует $c > 0$ такое, что

$$\|Y(\theta)P_{n-1}\zeta_k\| \geq c\|P_{n-1}\zeta_k\| = c\delta_k$$

для любого $\theta \in [0, T]$, и, таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &\|\nu_k(t_k) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k))\| = \\ &= \|\Gamma(\zeta_k) - \widetilde{x}(\zeta_k^n + \overline{\theta})\| = \left\|Y\left(\zeta_k^n + \overline{\theta}\right)P_{n-1}\zeta_k\right\| \geq c\delta_k \end{aligned} \tag{1.27}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны из (1.21) заключаем, что существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\|\nu_k(T) - \nu_k(t_k)\| \leq c_1\varepsilon_k \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

Наконец, из леммы 1.3 следует, что функция $\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\cdot)\right]^n + \overline{\theta}\right)$ непрерывно дифференцируема и, учитывая (1.28), существует $c_2 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &\|R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k))\| = \\ &= \left\|\widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) - \widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(t_k))\right]^n + \overline{\theta}\right)\right\| \leq \\ &\leq c_2\|\nu_k(T) - \nu_k(t_k)\| \leq c_1c_2\varepsilon_k \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Теперь возможно оценить $\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|$ снизу. Имеем

$$\begin{aligned} &\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\| = \\ &= \|\nu_k(t_k) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k)) + \\ &+ \nu_k(T) - \nu_k(t_k) - (R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k)))\| \geq \\ &\geq |\|\nu_k(t_k) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k))\| - \\ &\|\nu_k(T) - \nu_k(t_k) - (R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k)))\||\,. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Так как $\varepsilon_k \in (0, \delta_k^{1+\alpha})$, то существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $c_1\varepsilon_k + c_1c_2\varepsilon_k < c\delta_k$ для всех $k \geq k_0$. Следовательно, из (1.28) и (1.29) имеем

$$\|\nu_k(T) - \nu_k(t_k) - (R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k)))\| \leq c_1\varepsilon_k + c_1c_2\varepsilon_k < c\delta_k, \tag{1.31}$$

для всех $k \geq k_0$. Используя (1.27) и (1.31), можем переписать (1.30) как

$$\begin{aligned} &\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\| \geq \|\nu_k(t_k) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k))\| - \\ &- \|\nu_k(T) - \nu_k(t_k) - (R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(t_k)))\| \end{aligned} \tag{1.32}$$

и, таким образом,

$$\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\| \geq c\delta_k - c_1\varepsilon_k - c_1c_2\varepsilon_k \quad \text{для любого } k \geq k_0.$$

Используя это неравенство для любого $k \geq k_0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_k}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} &\leq \frac{\varepsilon_k}{c\delta_k - c_1\varepsilon_k - c_1c_2\varepsilon_k} \leq \\ \leq &\frac{\delta_k^{1+\alpha}}{c\delta_k - c_1\delta_k^{1+\alpha} - c_1c_2\delta_k^{1+\alpha}} = \frac{\delta_k^{\alpha}}{c - c_1\delta_k^{\alpha} - c_1c_2\delta_k^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Используя (1.33) и переходя к пределу при $k \to \infty$ в (1.22) деленном на $\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|$, получаем

$$\left(I - \Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(\zeta_0^n + \overline{\theta}))\right) l_0 = 0. \tag{1.34}$$

Чтобы доказать, что (1.34) не верно, установим, что

$$\left\langle (I - \Omega'_{(3)}(T, 0, \xi_0))l_0, \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi_0)\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = 0. \tag{1.35}$$

Действительно,

$$\left\langle \frac{\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|}, \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} \left\langle \Gamma(\Gamma^{-1}(\nu_k(T))) - \widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right), \right.$$

$$\left. \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} \left\langle Y\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) P_{n-1}\Gamma^{-1}(\nu_k(T)), \right.$$

$$\left. \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle,$$

и, таким образом, пользуясь леммой 1.2, можем заключить, что

$$\left\langle \frac{\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|}, \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.36}$$

По определению вектора l_0 из (1.36) получаем

$$\left\langle l_0, \widetilde{z}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = 0. \tag{1.37}$$

Но $\|l_0\| = 1$, и на основании из леммы 1.2 имеем, что существует $l_* \neq 0$ такое, что

$$l_0 = Y\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) P_{n-1} l_* \quad \text{и} \quad P_{n-1} l_* = l_* \tag{1.38}$$

и, замечая, что (см., например, [20], теорема 2.1),

$$\Omega'_{(3)}(t, 0, \widetilde{x}(\tau)) = Y(t+\tau) Y^{-1}(\tau) \quad \text{для всех } t, \tau \in \mathbb{R}, \tag{1.39}$$

имеем

$$\begin{gathered}
\left(I - \Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(\zeta_0^n + \overline{\theta}))\right) l_0 = \left(I - Y\left(T + \zeta_0^n + \overline{\theta}\right) Y^{-1}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right)\right) l_0 = \\
= \left(Y\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) - Y\left(T + \zeta_0^n + \overline{\theta}\right)\right) P_{n-1} l_* = \\
= \Phi\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda(\zeta_0^n + \overline{\theta})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda(T + \zeta_0^n + \overline{\theta})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P_{n-1} l_* = \\
= \Phi\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda(\zeta_0^n + \overline{\theta})}(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_{n-1} l_*
\end{gathered} \tag{1.40}$$

в противоречии с (1.34).

Покажем теперь, что случай (1.24) также приводит к противоречию. Если, переходя при необходимости к подпоследовательности, $\dfrac{\varepsilon_k}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} \to 0$, то возможно действовать как и прежде для получения ложного факта (1.34). Рассмотрим теперь случай, когда $\dfrac{\varepsilon_k}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} \to l$, с $l > 0$ или $l = +\infty$. Из (1.22) заключаем, что

$$\begin{gathered}
\frac{\varepsilon_k}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} \left\langle \Xi_k(\widetilde{x})(T), \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = \\
= \left\langle \Upsilon_k(\widetilde{x})(T), \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle,
\end{gathered} \tag{1.41}$$

где

$$\begin{aligned}
\Xi_k(\widetilde{x})(T) := \lambda_k (F_{\varepsilon_k} \nu_k)(T) - (1 - \lambda_k) \dot{\widetilde{x}}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \cdot \\
\cdot \widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right) + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k},
\end{aligned}$$

$$\Upsilon_k(\widetilde{x})(T) := \lambda_k \left(I - \Omega'_{(3)}(T, 0, R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)))\right) \frac{\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} -$$

$$-\lambda_k \frac{o(\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T)))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|} +$$

$$+(1-\lambda_k)\left(I - \Omega'_{(3)}\left(T - \varepsilon_k \widetilde{M}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n\right), 0, R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\right)\right) \circ$$

$$\circ \frac{\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))}{\|\nu_k(T) - R_{\widetilde{x}}(\nu_k(T))\|}.$$

Используя представление (1.38), формулу (1.40) и лемму 1.2, получаем

$$\left\langle \left(I - \Omega'_{(3)}\left(T, 0, \widetilde{x}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right)\right)\right) l_0, \widetilde{z}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle Y\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right)\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right) P_{n-1} l_*, \widetilde{z}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle Y\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) P_{n-1}\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right) l_*, \widetilde{z}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\left\langle \Upsilon_k(\widetilde{x})(T), \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

и из (1.41) заключаем, что

$$\left\langle \Xi_k(\widetilde{x})(T), \widetilde{z}\left(\left[\Gamma^{-1}(\nu_k(T))\right]^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\left\langle \lambda_0 \widehat{F}\left(\widetilde{x}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right)\right) - (1-\lambda_0)\dot{\widetilde{x}}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \widetilde{M}\left(\zeta_0^n\right), \widetilde{z}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = 0, \qquad (1.42)$$

где

$$\widehat{F}(\xi) = \int_0^T \left(\Omega'_{(3)}(\tau, 0, \xi)\right)^{-1} g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau.$$

По лемме Перрона (см. [68] или [11], Гл. III, § 12)

$$\left\langle \dot{\widetilde{x}}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \widetilde{M}\left(\zeta_0^n\right), \widetilde{z}\left(\zeta_0^n + \overline{\theta}\right) \right\rangle = \left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0) \right\rangle \widetilde{M}\left(\zeta_0^n\right)$$

и, таким образом, (1.42) может быть переписано как

$$\lambda_0 \operatorname{sign}\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0) \right\rangle \left\langle \widehat{F}\left(\widetilde{x}(\zeta_0^n + \overline{\theta})\right), \widetilde{z}(\zeta_0^n + \overline{\theta}) \right\rangle -$$

$$-\left(1-\lambda_0\right)\left|\left\langle\dot{\widetilde{x}}(0),\widetilde{z}(0)\right\rangle\right| M\left(\zeta_0^n\right)=0. \qquad (1.43)$$

Покажем, что

$$\operatorname{sign}\left\langle\dot{\widetilde{x}}(0),\widetilde{z}(0)\right\rangle\left\langle\widehat{F}\left(\widetilde{x}\left(\theta\right)\right),\widetilde{z}\left(\theta\right)\right\rangle=M_{\widetilde{x}}(\theta), \qquad \theta\in[0,T]. \qquad (1.44)$$

Обозначим через $Z(t)$ и $Z_0(t)$ фундаментальные матрицы сопряженной системы (1.12) такие, что $Z(0)=I$ и $Z_0(t)=(Z_{n-1}(t),\widetilde{z}(t))$, где $Z_{n-1}(t)$ является $n\times(n-1)$-матрицей, чьи столбцы являются не T-периодическими линейно-независимыми собственными функциями системы (1.12). Так как

$$\left(x'_{(3)}(\tau,0,\widetilde{x}(\theta))\right)^{-1}=Y(\theta)Y^{-1}(\tau+\theta)=$$

$$=\left(Z^{-1}(\theta)\right)^{*}Z^{*}(\tau+\theta)=\left(Z_0^{-1}(\theta)\right)^{*}Z_0^{*}(\tau+\theta),$$

(см., напр., [11], Гл. III, § 12), и $\widetilde{z}(\theta)=(Z_{n-1}(\theta),\widetilde{z}(\theta))\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ то имеем

$$\left\langle\widehat{F}\left(\widetilde{x}\left(\theta\right)\right),\widetilde{z}\left(\theta\right)\right\rangle=\left\langle\left(Z_0^{-1}(\theta)\right)^{*}\int\limits_0^T Z_0^{*}(\tau+\theta)\,g(\tau,\widetilde{x}(\tau+\theta),0)d\tau,\widetilde{z}\left(\theta\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\int\limits_\theta^{T+\theta}\begin{pmatrix}Z_{n-1}^{*}(\tau)\\ \widetilde{z}(\tau)\end{pmatrix}g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau),0)d\tau,\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=$$

$$=\int\limits_\theta^{T+\theta}\left\langle\widetilde{z}(\tau)g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau),0)\right\rangle d\tau=M_{\widetilde{x}}(\theta)$$

и, таким образом, (1.44) выполнено. Учитывая (1.44), можем переписать (1.43) как

$$\lambda_0 M_{\widetilde{x}}\left(\zeta_0^n+\overline{\theta}\right)-\left(1-\lambda_0\right)\left|\left\langle\dot{\widetilde{x}}(0),\widetilde{z}(0)\right\rangle\right|\widetilde{M}\left(\zeta_0^n\right)=0,$$

где либо $\zeta_0^n + \overline{\theta} = \theta_1$, либо $\zeta_0^n + \overline{\theta} = \theta_2$. Последнее, в свою очередь, может быть переписано как

$$\lambda_0 M_{\widetilde{x}}\left(\theta_i\right) - (1-\lambda_0)\left|\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0)\right\rangle\right| \widetilde{M}\left((-1)^i|\zeta_0^n|\right) = 0, \tag{1.45}$$

где либо $i=1$, либо $i=2$. Если $d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}},(\theta_1,\theta_2))=0$, то (см., напр., [21], §3.2 по поводу определения топологической степени в $\mathbb{R}$) для любого $i=1,2$ и любого $a \geq 0$ имеем

$$\widetilde{M}\left((-1)^i a\right) = -a\mathrm{sign}(M_{\widetilde{x}}(\theta_1)) = -a\mathrm{sign}(M_{\widetilde{x}}(\theta_2)),$$

и, таким образом, если $d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}},(\theta_1,\theta_2))=0$, то (1.45) может быть переписано как

$$\lambda_0 M_{\widetilde{x}}\left(\theta_i\right) + (1-\lambda_0)\left|\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0)\right\rangle\right| \cdot |\zeta_0^n| \cdot \mathrm{sign}\left(M_{\widetilde{x}}(\theta_i)\right) = 0, \tag{1.46}$$

где либо $i=1$, либо $i=2$. Если $d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}},(\theta_1,\theta_2)) \neq 0$, то для любых $i=1,2$ и любых $a \geq 0$ имеем

$$\widetilde{M}\left((-1)^i a\right) = d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}},(\theta_1,\theta_2)) \cdot (-1)^{i+1} a =$$

$$= (-1)^{i+1}\mathrm{sign}(M_{\widetilde{x}}(\theta_i))(-1)^i a = -a\mathrm{sign}(M_{\widetilde{x}}(\theta_i))$$

и, таким образом, (1.45) может быть вновь переписано как (1.46). Но (1.46) противоречит либо предположению $M_{\widetilde{x}}(\theta_1) \neq 0$ (в случае $i=1$), либо предположению $M_{\widetilde{x}}(\theta_2) \neq 0$ (в случае $i=2$).

Следовательно, ни (1.24), ни (1.23) не могут осуществиться и, таким образом, существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых $\delta \in (0,\delta_0]$ и любых $\varepsilon \in (0,\delta^{1+\alpha}]$ имеем, что $D_\varepsilon(\lambda,\nu) \neq 0$ для всех $\lambda \in [0,1]$ и всех $\nu \in \partial\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)}$. Значит, для любых $\delta \in (0,\delta_0]$ и $\varepsilon \in (0,\delta^{1+\alpha}]$ топологические степени $d(I-G_\varepsilon,\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ и $d(I-\widehat{A}_\varepsilon,\widehat{W}_{\Gamma(C_\delta)})$ определены, и (1.19) выполнено. Как уже замечено, (1.19) влечет (1.18), значит, чтобы закончить доказательство формулы (1.13), остается показать, что $d(I-A_\varepsilon,\Gamma(C_\delta)) = (-1)^{\beta(\widetilde{x})} d_{\mathbb{R}}\left(M_{\widetilde{x}},(\theta_1,\theta_2)\right)$ для всех

$\delta \in (0, \delta_0]$ и $\varepsilon \in (0, \delta^{1+\alpha}]$. Пусть $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\varepsilon \in (0, \delta^{1+\alpha}]$. Так как Γ является гомеоморфизмом множества $B_\Delta(C_\delta)$ на $\Gamma(B_\Delta(C_\delta))$, то (см., напр., [21], теорема 26.4) получаем

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - A_\varepsilon, \Gamma(C_\delta)) = d_{\mathbb{R}^n}(I - \Gamma^{-1}A_\varepsilon\Gamma, C_\delta).$$

Пусть $\zeta \in C_\delta$. Учитывая, что (1.39) и действуя как в (1.40), получаем

$$\zeta - (\Gamma^{-1}A_\varepsilon\Gamma)(\zeta) = \zeta - (\Gamma^{-1}A_\varepsilon)\left(\frac{Y(\zeta^n + \overline{\theta})}{\|Y\|_{M_T}} P_{n-1}\zeta + \widetilde{x}(\zeta^n + \overline{\theta})\right) =$$

$$= \zeta - \Gamma^{-1}\left(\Omega'_{(3)}\left(T - \varepsilon\widetilde{M}(\zeta^n), 0, \widetilde{x}\left(\zeta^n + \overline{\theta}\right)\right)\frac{Y(\zeta^n + \overline{\theta})}{\|Y\|_{M_T}} P_{n-1}\zeta + \right.$$

$$\left. + \widetilde{x}(\zeta^n + \overline{\theta} - \varepsilon\widetilde{M}(\zeta^n))\right) =$$

$$= \zeta - \Gamma^{-1}\left(\frac{Y\left(\zeta^n + \overline{\theta} - \varepsilon\widetilde{M}(\zeta^n)\right)}{\|Y\|_{M_T}} P_{n-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\zeta + \right.$$

$$\left. + \widetilde{x}\left(\zeta^n + \overline{\theta} - \varepsilon\widetilde{M}(\zeta^n)\right)\right) =$$

$$= \zeta - \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda T}\left(\zeta|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right) \\ \zeta^n - \varepsilon\widetilde{M}(\zeta^n) \end{pmatrix}$$

и, таким образом,

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - \Gamma^{-1}A_\varepsilon\Gamma, C_\delta) = d_{\mathbb{R}^n}\left(\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right) \times \varepsilon\widetilde{M}, C_\delta\right),$$

где $\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right) \times \varepsilon\widetilde{M} = \left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}, \varepsilon\widetilde{M}\right)$. По свойству топологической степени произведения векторных полей (см., напр., [21], теорема 7.4) имеем

$$d_{\mathbb{R}^n}\left(\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}\right) \times \varepsilon\widetilde{M}, C_\delta\right) =$$

$$= d_{\mathbb{R}^n}\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}, B_\delta(0)\right) \cdot d_{\mathbb{R}}\left(\varepsilon\widetilde{M}, \left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\right),$$

где $d_{\mathbb{R}^n}\left(I - \mathrm{e}^{\Lambda T}, B_\delta(0)\right) = (-1)^{\beta(\widetilde{x})}$ согласно ([21], теорема 6.1) и

$$d_{\mathbb{R}}\left(\varepsilon\widetilde{M}, \left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\right) = -d_{\mathbb{R}}\left(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1, \theta_2)\right)$$

прямым подсчетом. Таким образом, имеем

$$d_{\mathbb{R}^n}(I-\Gamma^{-1}A_\varepsilon\Gamma, C_\delta) = -(-1)^{\beta(\widetilde{x})} d_{\mathbb{R}}\left(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1,\theta_2)\right).$$

Подводя итог, заключаем, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (0,\delta_0]$ и любого $\varepsilon \in (0,\delta^{1+\alpha}]$ топологическая степень $d(I-Q_\varepsilon, W_{\Gamma(C_\delta)})$ определена и может быть подсчитана по формуле

$$d(I-Q_\varepsilon, W_{\Gamma(C_\delta)}) = -(-1)^{\beta(\widetilde{x})} d_{\mathbb{R}}\left(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1,\theta_2)\right).$$

Чтобы завершить доказательство, остается показать, что $V_\delta := \Gamma(C_\delta)$ удовлетворяет свойствам 1) и 2). Для этой цели, положим $\xi \in \Gamma(C_\delta)$, значит

$$\xi = \frac{Y(\zeta^n+\overline{\theta})}{\|Y\|_{M_T}} P_{n-1}\zeta + \widetilde{x}(\zeta^n+\overline{\theta}).$$

для некоторого $\zeta \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего $\|P_{n-1}\zeta\| \le \delta$ и $\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n + \overline{\theta} \in [\theta_1,\theta_2]$. Следовательно,

$$\left\|\xi - \widetilde{x}\left(\left[\Gamma^{-1}(\xi)\right]^n + \overline{\theta}\right)\right\| = \left\|\frac{Y(\zeta^n+\overline{\theta})}{\|Y\|_{M_T}} P_{n-1}\zeta\right\| \le \|P_{n-1}\zeta\| \le \delta$$

и, значит, свойство 1) выполнено. По определению множества C_δ имеем, что для любого $\delta \in (0,\delta_0)$ точки $\left(0,...,0,-\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$ и $\left(0,...,0,\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$ принадлежат границе множества C_δ. Следовательно, точки $\widetilde{x}(\theta_1)$ и $\widetilde{x}(\theta_2)$ принадлежат границе множества $\Gamma(C_\delta)$. С другой стороны, если $\xi = \widetilde{x}(\theta)$, где $\theta \in (\theta_1,\theta_2)$, то

$$\Gamma^{-1}(\xi) = \left(0,...,0,\theta-\overline{\theta}\right) \subset C_\delta. \tag{1.47}$$

Следовательно, $\xi \in \Gamma(C_\delta)$ и свойство 2) также удовлетворено.

Доказательство теоремы 1.1 завершено.

Далее нам необходима следующая лемма, принадлежащая И. Г. Малкину ([29], формула 3.13 или [30], теорема с. 387).

Лемма 1.4 *Если*

$$M_x(0) \ne 0 \quad \text{\textit{для некоторого}}\ x \in \mathfrak{S}_W,$$

то

$$Q_\varepsilon x \neq x \text{ *для любого достаточно малого* } \varepsilon > 0.$$

Для каждого $x \in \mathfrak{S}_W$ положим

$$\Theta_W(x) = \{\theta_0 \in (0,T) : S_{\theta_0}x \in \partial W,\ S_\theta x \in W \text{ для любого } \theta \in (0,\theta_0)\},$$

$$(S_\theta x)(t) = x(t+\theta)$$

В дальнейшем постоянные функции пространства $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ отождествляются с соответствующими элементами пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2 *Предположим, что множество*

$$\mathfrak{S}_W = \{x \in \partial W : Q_0 x = x\}$$

конечно и содержит только простые T-периодические циклы системы (1.2). Предположим, что $M_x(0) \neq 0$ для всех $x \in \mathfrak{S}_W$. Тогда для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ топологическая степень $d(I - Q_\varepsilon, W)$ определена, и справедлива следующая формула

$$d(I - Q_\varepsilon, W) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n) -$$
$$- \sum_{x \in \mathfrak{S}_W:\ \Theta_W(x) \neq \emptyset} (-1)^{\beta(x)} d_{\mathbb{R}} \left(M_x, (0, \min\{\Theta_W(x)\})\right). \tag{1.48}$$

Доказательство. Для каждого $x \in \mathfrak{S}_W$, удовлетворяющего $\Theta_W(x) \neq \emptyset$, обозначим через $\delta_0(x)$ и $\{V_\delta(x)\}_{\delta \in (0,\delta_0(x))}$ те числа и множества, о которых говорится в теореме 1.1, где $\widetilde{x} := x$, $\theta_1 := 0$ и $\theta_2 := \min\{\Theta_W(x)\}$. Пусть $\delta_1 = \min_{x \in \mathfrak{S}_W : \Theta_W(x) \neq \emptyset} \delta_0(x) > 0$. Так как $M_x(0) \neq 0$ для любого $x \in \mathfrak{S}_W$, то по лемме Малкина (см. лемму 1.4) существуют $\delta_* \in (0, \delta_1)$ и $\varepsilon_* > 0$ такие, что

$$Q_\varepsilon \widetilde{x} \neq \widetilde{x} \quad \text{для } \widetilde{x} \in \overline{B_{\delta_*}(x)} \text{ при любых } x \in \mathfrak{S}_W \text{ и } \varepsilon \in (0, \varepsilon_*). \tag{1.49}$$

Пользуясь определением множества $\mathfrak{S}_W$, из (1.49) для любых $x \in \mathfrak{S}_W$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ имеем

$$Q_\varepsilon \widetilde{x} \neq \widetilde{x} \quad \text{для любого } \widetilde{x} \in \overline{B_{\delta_*}(x)} \cup \overline{B_{\delta_*}\left(S_{\min\{\Theta_W(x)\}} x\right)}. \tag{1.50}$$

Пусть $\delta_{**} \in (0, \delta_*)$ достаточно мало так, что

$$\big(B_{\delta_*}(x) \cup B_{\delta_*}(S_{\min\{\Theta_W(x)\}}x) \cup W_{V_{\delta_{**}(x)}}\big) \setminus \overline{W} \subset B_{\delta_*}(x) \cup B_{\delta_*}(S_{\min\{\Theta_W(x)\}}x)$$

для любых $x \in \mathfrak{S}_W$. Тогда, учитывая (1.50), имеем

$$Q_\varepsilon \widetilde{x} \neq \widetilde{x} \quad \text{for } \widetilde{x} \in \big(B_{\delta_*}(x) \cup B_{\delta_*}(S_{\min\{\Theta_W(x)\}}x) \cup W_{V_{\delta_{**}(x)}}\big) \setminus \overline{W}$$

при $x \in \mathfrak{S}_W$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$. Следовательно, применяя формулу теоремы 1.1, для любого $x \in \mathfrak{S}_W$ такого, что $\Theta_W(x) \neq \emptyset$, и любого $\varepsilon \in \big(0, \min\{\delta^{1+\alpha}, \varepsilon_*\}\big)$ имеем

$$\begin{aligned} & d\left(I - Q_\varepsilon, \big(B_{\delta_*}(x) \cup B_{\delta_*}(S_{\min\{\Theta_W(x)\}}x) \cup W_{V_{\delta_{**}(x)}}\big) \cap W\right) = \\ & = d\left(I - Q_\varepsilon, B_{\delta_*}(x) \cup B_{\delta_*}(S_{\min\{\Theta_W(x)\}}x) \cup W_{V_{\delta_{**}(x)}}\right) = \\ & = d(I - Q_\varepsilon, W_{V_{\delta_{**}(x)}}) = -(-1)^{\beta(x)} d_{\mathbb{R}}\left(M_x, (0, \min\{\Theta_W(x)\})\right). \end{aligned} \tag{1.51}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_W^0 = \{x \in \mathfrak{S}_W : & \text{ существует } \delta_0 > 0 \text{ такое,} \\ & \text{что } S_\delta(x) \notin \partial W \text{ для всех } \delta \in (-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0)\}. \end{aligned}$$

Из (1.49) заключаем, что при каждых $x \in \mathfrak{S}_W^0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ выполнено равенство

$$d\left(I - Q_\varepsilon, B_{\delta_*}(x) \cap W\right) = 0. \tag{1.52}$$

Так как любая точка $x \in \mathfrak{S}_W$ является предельным циклом системы (1.2), и по предположению число таких точек конечно, без ограничения общности можно считать, что $\delta_* > 0$ настолько мало, что

$$\begin{aligned} & Q_0(\widehat{x}) \neq \widehat{x} \quad \text{для любых } \widehat{x} \in C([0,T], \mathbb{R}^n) \text{ таких,} \\ & \text{что } \widehat{x}(0) \in B_{\delta_*}(x([0,T])) \setminus x([0,T]). \end{aligned} \tag{1.53}$$

Следовательно, граница множества $W \setminus E_{\delta_*}$, где

$$E_{\delta_*} := \left(\bigcup_{x \in \mathfrak{S}_W : \Theta_W(x) \neq \emptyset} \big(B_{\delta_*}(x) \cup B_{\delta_*}(S_{\Theta_W(x)}x) \cup W_{V_{\delta_{**}(x)}}\big) \cap W \right) \bigcup$$

$$\bigcup \left(\bigcup_{x \in \mathfrak{S}_W^0} B_{\delta_*}(x) \cap W \right),$$

не содержит T-периодических решений системы (1.2). Но результат Капетто-Мавена-Занолина ([50], следствие 2) утверждает, что если оператор Q_0 не имеет неподвижных точек на границе какого-нибудь открытого ограниченного множества $A \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$, то

$$d(I - Q_0, A) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, A \cap \mathbb{R}^n),$$

поэтому

$$d(I - Q_0, W \backslash E_{\delta_*}) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n} \left(f, (W \backslash E_{\delta_*}) \cap \mathbb{R}^n\right). \tag{1.54}$$

На основании (1.53) функция f невырождена на множестве $E_{\delta_*} \cap \mathbb{R}^n$, и из (1.54) заключаем, что

$$d(I - Q_0, W \backslash E_{\delta_*}) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n). \tag{1.55}$$

Суммируя (1.51), (1.52) и (1.55), получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1.1 *Из формулы (1.48) следует, что точки множества* $\mathfrak{S}_W$ *такие, что* $S_\theta x \notin \mathfrak{S}_W$ *для всех* $\theta \in (0, T)$ *не влияют на значение степени* $d(I - Q_\varepsilon, W)$, *где* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало.*

Положим $X = \{x \in C([0,T], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(T)\}$ и обозначим как $L : \mathrm{dom}L \subset X \to L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ линейный оператор, определенный как $(Lx)(\cdot) = \dot{x}(\cdot)$ с $\mathrm{dom}L = \{x \in X : x(\cdot) -$ абсолютно непрерывна$\}$. Тогда L – оператор Фредгольма нулевого индекса (см. [50], пункт II.1). Пусть $N_\varepsilon : X \to L^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ – оператор Немыцкого, задаваемый как $(N_\varepsilon x)(\cdot) = f(x(\cdot)) + \varepsilon g(\cdot, x(\cdot), \varepsilon)$. Таким образом, существование T-периодических решений для системы (1.1) эквивалентно разрешимости уравнения

$$Lx = N_\varepsilon x, \quad x \in \mathrm{dom}L. \tag{1.56}$$

В следующем утверждении предлагается формула для индекса совпадения $D_L(L-N_\varepsilon, W\cap X)$ операторов L и N_ε, (см. Ж. Мавен [66], p. 19), подобная формуле теоремы 1.2.

Следствие 1.1 *Предположим, что все условия теоремы 1.2 выполнены. Тогда, для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ индекс совпадения $D_L(L-N_\varepsilon, W\cap X)$ определен, и справедлива следующая формула*

$$\begin{aligned} D_L(L-N_\varepsilon, W\cap X) = {} & (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W\cap \mathbb{R}^n) - \\ - & \sum_{x\in\mathfrak{S}_W:\ \Theta_W(x)\neq\emptyset} (-1)^{\beta(x)} d_{\mathbb{R}}\left(M_x, (0, \min\{\Theta_W(x)\})\right). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Доказательство. Так как $d(I-Q_\varepsilon, W)$ определен для достаточно малых $\varepsilon>0$, то $D_L(L-N_\varepsilon, W\cap X)$ также определен при этих значениях $\varepsilon>0$, см. ([66], Гл. 2, § 2). Чтобы доказать (1.57), используем принцип родственности, разработанный в ([66], Гл. 3). Во-первых, заметим, что нули оператора $R_\varepsilon : C([0,T],\mathbb{R}^n)\to C([0,T],\mathbb{R}^n)$, определенного как

$$(R_\varepsilon x)(t) = \ x(t) - x(0) - \int\limits_0^T \left(f(x(\tau)) + \varepsilon g(\tau, x(\tau), \varepsilon)\right) d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \left(f(x(\tau)) + \varepsilon g(\tau, x(\tau), \varepsilon)\right) d\tau + t\int\limits_0^T \left(f(x(\tau)) + \varepsilon g(\tau, x(\tau), \varepsilon)\right) d\tau,$$

совпадают с неподвижными точками оператора Q_ε, и значит $d(R_\varepsilon, W)$ также определен при достаточно малых $\varepsilon>0$. На основании принципа родственности для топологический степеней эквивалентных интегральных операторов (см. Ж. Мавен [66], теорема III.1 при $a=1$, $b=0$ и теорема III.4)

$$d(R_\varepsilon, W) = d(I-Q_\varepsilon, W).$$

Далее, используя для определения $D_L(L-N_\varepsilon, W\cap X)$ методы, разработанные в ([66], Гл. III, § 4) и принцип родственности, связывающий индекс совпадения операторов L и N_ε с топологической степенью эквивалентного

интегрального оператора (см. [66], теорема III.7), получаем равенство

$$D_L(L - N_\varepsilon, W \cap X) = d(R_\varepsilon, W),$$

которое завершает доказательство.

Следствие доказано.

Для перехода от условий теоремы 1.2 к основному предположению (A_0) (см. начало пункта) необходимы нижеследующие утверждения.

Замечание 1.2 *Имеют место соотношения*

$$\mathfrak{S}_{W_U} = \mathfrak{S}^U$$

и

$$\Theta_{W_U}(x) = \{\theta_0 \in (0,T) : x(\theta_0) \in \partial U,\ x(\theta) \in U \text{ для всех } \theta \in (0,\theta_0)\}.$$

Лемма 1.5 *Пусть выполнено условие* (A_0). *Тогда*

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, W_U \cap \mathbb{R}^n) = d_{\mathbb{R}^n}(f, U).$$

Доказательство. Доказательство леммы производится на основании принципа продолжения Лерэ-Шаудера. Пусть

$$U_\lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \Omega(0, \lambda t, \xi) \in U \text{ для любого } t \in [0,T]\}, \quad \lambda \in [0,1],$$

покажем, что

$$0 \notin \widetilde{M}(\partial U_\lambda) \quad \text{для любого } \lambda \in [0,1]. \tag{1.58}$$

Предположим противное, тогда существует $\lambda_0 \in [0,1]$ такое, что $\xi_0 \in \partial U_{\lambda_0}$ и $\widetilde{M}(\xi_0) = 0$. Заметим, что $\Omega(0, \lambda_0 t, \xi_0) \in \overline{U}$ для любого $t \in [0,T]$. Следовательно, существует $t_0 \in [0,T]$ такое, что $\Omega(0, \lambda_0 t_0, \xi_0) \in \partial U$, и на основании факта $\widetilde{M}(\xi_0) = 0$, получаем, что $\Omega(0, \lambda_0 t, \xi_0)$ постоянно по отношению к $t \in [0,T]$. Значит, мы имеем $\Omega(0, \lambda_0 t_0, \xi_0) = \Omega(0, 0, \xi_0) = \xi_0$ и получаем, что $\xi_0 \in \partial U$, противореча предположению о том, что ∂U содержит только начальные условия предельных циклов системы (1.2). Используя принцип

продолжения Лерэ-Шаудера (см. [22], Гл. 3, § 16, "Фундаментальная теорема"или [49], теорема 10.7) из (1.58) заключаем, что

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, U_0) = d_{\mathbb{R}^n}(f, U_1).$$

С другой стороны, $U_0 = U$ и $U_1 = W_U \cap \mathbb{R}^n$.

Лемма доказана.

Положим $\Theta^U(\widetilde{x}) = \Theta_{W_U}$, то есть

$$\Theta^U(\widetilde{x}) = \{\theta_0 \in (0, T) : \widetilde{x}(\theta_0) \in \partial U,\ \widetilde{x}(\theta) \in U,\ \theta \in (0, \theta_0)\}.$$

Напомним, что согласно условию (A_0),

$$\mathfrak{S}^U = \bigcup_{\xi \in \partial U : \Omega(T,0,\xi) = \xi} \{x \in C([0, T], \mathbb{R}^n) : x(t) = \Omega(t, 0, \xi),\ t \in [0, T]\}.$$

На основании замечания 1.2 и леммы 1.5 получаем следующее следствие из теоремы 1.2.

Теорема 1.3 *Пусть выполнено условие* (A_0). *Предположим, что* $M_x(0) \neq 0$ *для всех* $x \in \mathfrak{S}^U$. *Тогда для каждого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *топологическая степень* $d(I - Q_\varepsilon, W_U)$ *определена, и справедлива следующая формула*

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, U) -$$
$$- \sum_{x \in \mathfrak{S}^U:\ \Theta^U(x) \neq \emptyset} (-1)^{\beta(x)} d_{\mathbb{R}} \left(M_x, \left(0, \min\{\Theta^U(x)\}\right)\right), \qquad (1.59)$$

Предположим теперь, что

$(A_{\mathcal{P}})$ решение x системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = \xi$ существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0, T]$ при любых $t_0 \in [0, T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$.

При условии $(A_{\mathcal{P}})$ для системы (1.1) при любых $\varepsilon > 0$ определен оператор $\mathcal{P}_\varepsilon$ Пуанкаре, соответствующий задаче о T-периодических решениях для (1.1) (см. определение 1.2). В этом случае можно сформулировать аналогичное теореме 1.3 утверждение о топологической степени оператора $I - \mathcal{P}_\varepsilon$ на U.

Действительно, справедлив следующий основной результат.

Теорема 1.4 *Предположим, что выполнены условия* (A_0) *и* $(A_{\mathcal{P}})$. *Если* $M_{\widetilde{x}}(0) \neq 0$ *для любого* $\widetilde{x} \in \mathfrak{S}^U$, *то для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *топологическая степень* $d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U)$ *определена и может быть посчитана по формуле*

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, U) - \\ - \sum_{\widetilde{x} \in \mathfrak{S}^U:\ \Theta^U(\widetilde{x}) \neq \emptyset} (-1)^{\beta(\widetilde{x})} d_{\mathbb{R}} \left(M_{\widetilde{x}}, \left(0, \min\{\Theta^U(\widetilde{x})\}\right)\right). \qquad (1.60)$$

Доказательство. Из теоремы 1.2, учитывая замечание 1.2, заключаем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ степень $d(I - Q_\varepsilon, W_U)$ определена, и

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W_U \cap \mathbb{R}^n) - \\ - \sum_{x \in \mathfrak{S}^U:\ \Theta^U(x) \neq \emptyset} (-1)^{\beta(x)} d_{\mathbb{R}} \left(M_x, \left(0, \min\{\Theta^U(x)\}\right)\right). \qquad (1.61)$$

Следовательно, чтобы доказать следствие, достаточно показать, что

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U) = d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U) \quad \text{для любого } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \qquad (1.62)$$

и

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, W_U \cap \mathbb{R}^n) = d_{\mathbb{R}^n}(f, U). \qquad (1.63)$$

Справедливость (1.63) следует из леммы 1.5. Чтобы доказать (1.62), определим $W_U^\varepsilon \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$ как

$$W_U^\varepsilon = \left\{\widehat{x} \in C([0,T], \mathbb{R}^n) : \Omega_\varepsilon(0, t, \widehat{x}(t)) \in U, \text{ для любого } t \in [0,T]\right\},$$

где Ω_ε – оператор сдвига по траекториям возмущенной системы (1.1). Утверждается, что существует $\widehat{\varepsilon}_0 \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что

$$Q_\varepsilon x \neq x \quad \text{для любых } x \in (W_U \backslash W_U^\varepsilon) \cup (W_U^\varepsilon \backslash W_U) \text{ и } \varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon}_0]. \qquad (1.64)$$

Предположим противное, тогда существуют последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$ такие, что

$$x_k \in \left(W_U \backslash W_U^{\varepsilon_n}\right) \cup \left(W_U^{\varepsilon_n} \backslash W_U\right), \qquad (1.65)$$

и

$$x_k \to \widetilde{x} \text{ при } k \to \infty, \quad \text{где } \; Q_{\varepsilon_k} x_k = x_k. \tag{1.66}$$

Легко видеть, что (1.65) означает $\widetilde{x} \in \partial W_U$. Этот факт вместе с (1.66) и предположением $M_{\widetilde{x}}(0) \neq 0$ приводит к противоречию с утверждением леммы Малкина (1.4). Следовательно, утверждение (1.64) справедливо и значит

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U) = d(I - Q_\varepsilon, W_U^\varepsilon) \quad \text{для любого } \varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon}_0].$$

Так как для любого $\varepsilon \geq 0$ множества U и W_U^ε имеют общую серцивину по отношению к задаче о T-периодических решениях для (1.1) (см. [21], §28.5), то (см. [21], теорема 28.5) имеем

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U^\varepsilon) = d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U) \quad \text{для любого } \varepsilon \geq 0$$

и, таким образом, (1.62) доказано.

Теорема доказана.

Замечание 1.3 *Из формулы (1.60) следует, что если цикл $x \in \mathfrak{S}^U$ имеет с границей ∂U единственную общую точку, то этот цикл не влияет на $d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.*

1.3 Теоремы о продолжении T-периодических решений из $\overline{U}$ по параметру

На основании подходящего выбора множества $W \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$, участвующего в формуле теоремы 1.2, в этом пункте формулируются некоторые результаты о существовании T-периодических решений для системы (1.1), где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к лежащим в $\overline{U}$ T-периодическим решениям системы (1.2). Такие результаты называются результатами о продолжении T-периодических решений системы (1.1) при увеличении параметра $\varepsilon > 0$ от нуля до $\varepsilon_0 > 0$ (см. [50]).

Теорема 1.5 *Предположим, что все непостоянные T-периодические решения системы (1.2) являются простыми циклами этой системы. Тогда, для любого открытого ограниченного множества $W \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$, содержащего все постоянные решения системы (1.2) и удовлетворяющего условиям*

$$\mathfrak{S}_W \text{ конечно}, \quad M_x(0) \neq 0 \quad \text{для любого } x \in \mathfrak{S}_W$$

и

$$(-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n) - \\ - \sum_{x \in \mathfrak{S}_W:\ \Theta_W(x) \neq \emptyset} (-1)^{\beta(x)} d_{\mathbb{R}} \left(M_x, (0, \min\{\Theta_W(x)\})\right) \neq 0,$$

существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1.1) имеет T-периодическое решение в W.

Предположения теоремы 1.5 означают, что множество $\mathfrak{S}_W$ содержит только простые циклы системы (1.2). Следовательно, теорема 1.5 следует из теоремы 1.2 и теоремы Лерэ-Шаудера о неподвижной точке (см. [22], Гл. 1, § 7 или [21], теорема 20.5).

Следствие 1.2 *Предположим, что все непостоянные T-периодические решения системы (1.2) являются простыми циклами системы (1.2). Предположим, что существует открытое ограниченное множество $W \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$, содержащее все постоянные решения системы (1.2) и удовлетворяющее условию*

$$\begin{gathered} \mathfrak{S}_W \text{ конечно}, \quad M_x(0) \cdot M_x(\min\{\Theta_W(x)\}) > 0 \\ \text{для любого } x \in \mathfrak{S}_W \text{ такого, что } \Theta_W(x) \neq \emptyset \end{gathered} \tag{1.67}$$

и условию

$$(-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n) \neq 0.$$

Тогда, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.1) имеет T-периодическое решение в W.

Доказательство следствия 1.2 вытекает из утверждения (1.67), означающего (см. [21], § 3.2), что $d_{\mathbb{R}}\left(M_x, (0, \min\{\Theta_W(x)\})\right) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{S}_W$ такого, что $\Theta_W(x) \neq \emptyset$.

Рассмотрим теперь некоторые приложения теоремы 1.1 к задаче о существовании в системе (1.1) T-периодических решений близких к простому циклу системы (1.2). Вначале установим следующий результат.

Теорема 1.6 *Пусть $\widetilde{x}$ – простой T-периодический цикл системы (1.2). Пусть $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \theta_1 + \frac{T}{p}$, где $p \in \mathbb{N}$ и $\frac{T}{p}$ является наименьшим периодом цикла $\widetilde{x}$. Предположим, что*

$$M_{\widetilde{x}}(\theta_1) \cdot M_{\widetilde{x}}(\theta_2) < 0. \tag{1.68}$$

Обозначим через Θ множество всех нулей функции $M_{\widetilde{x}}$ на (θ_1, θ_2). Тогда, для достаточно малых $\varepsilon > 0$, система (1.1) имеет T-периодическое решение x_ε такое, что

$$\rho\left(x_\varepsilon(t), \widetilde{x}(t+\Theta)\right) \to 0 \quad \text{\textit{при} } \varepsilon \to 0. \tag{1.69}$$

Доказательство. Заметим, что условие (1.68) означает

$$M_{\widetilde{x}}(\theta_1) \neq 0 \quad \text{и} \quad M_{\widetilde{x}}(\theta_2) \neq 0$$

и, таким образом, условия теоремы 1.1 удовлетворены. Зафиксируем $\alpha > 0$, из теоремы 1.1 имеем $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta_0^{1+\alpha})$ топологическая степень $d(I - Q_\varepsilon, W_{V_{\delta(\varepsilon)}})$ определена при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/(1+\alpha)}$, и

$$d(I - Q_\varepsilon, W_{V_{\delta(\varepsilon)}}) = (-1)^{\beta(\widetilde{x})} d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1, \theta_2)).$$

Из (1.68) также имеем (см. [21], §3.2), что $|d_{\mathbb{R}}(M_{\widetilde{x}}, (\theta_1, \theta_2))| = 1$ и, таким образом, для любого $\varepsilon \in (0, \delta_0^{1+\alpha})$ система (1.1) имеет T-периодическое решение x_ε такое, что $x_\varepsilon(0) \in V_{\delta(\varepsilon)}$. Более того, из свойства 1) теоремы 1.1 заключаем

$$\rho\left(x_\varepsilon(0), \widetilde{x}([\theta_1, \theta_2])\right) \leq \delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/(1+\alpha)}. \tag{1.70}$$

Пусть $\nu_\varepsilon(t) = \Omega(0, t, x_\varepsilon(t))$, тогда согласно лемме 1.1

$$\dot{\nu}_\varepsilon(t) = \varepsilon \left(\Omega'_{(3)}(t, 0, \nu_\varepsilon(t))\right)^{-1} g(t, x(t, \nu_\varepsilon(t), \varepsilon)).$$

Следовательно, существует $M_1 > 0$ такое, что

$$\|\nu_\varepsilon(0) - \nu_\varepsilon(t)\| \le M_1 \varepsilon \quad \text{для любых } \varepsilon \in (0, \delta_0^{1+\alpha}) \text{ и } t \in [0, T]. \tag{1.71}$$

С другой стороны, $\nu_\varepsilon(0) = x_\varepsilon(0)$ и, таким образом, из (1.70) и (1.71) для любого $\varepsilon \in (0, \delta_0^{1+\alpha})$ и любого $t \in [0, T]$ справедливо соотношение

$$\rho(\nu_\varepsilon(t), \widetilde{x}([\theta_1, \theta_2])) \le \|\nu_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0)\| +$$

$$+ \rho(x_\varepsilon(0), \widetilde{x}([\theta_1, \theta_2])) \le \varepsilon^{1/(1+\alpha)} \left(1 + M_1 \varepsilon^{\alpha/(1+\alpha)}\right). \tag{1.72}$$

Так как для любого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ имеем $\|x_\varepsilon(t) - \widetilde{x}(t + \theta)\| = \|x(t, \nu_\varepsilon(t)) - x(t, \widetilde{x}(\theta))\|$, и, как это уже было замечено в доказательстве теоремы 1.1, функция $x(\cdot, \cdot)$ непрерывно дифференцируема по обоим переменным, заключаем, что существует $M_2 > 0$ такое, что

$$\|x_\varepsilon(t) - \widetilde{x}(t + \theta)\| \le M_2 \|\nu_\varepsilon(t) - \widetilde{x}(\theta)\| \tag{1.73}$$

для любых $\varepsilon \in (0, \delta_0^{1+\alpha})$, $t \in [0, T]$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Подставляя (1.72) в (1.73), получаем, что для любых $\varepsilon \in (0, \delta_0^{1+\alpha})$ и $t \in [0, T]$ выполнено

$$\rho(x_\varepsilon(t), \widetilde{x}(t + [\theta_1, \theta_2])) \le \varepsilon^{1/(1+\alpha)} M_2 \left(1 + M_1 \varepsilon^{\alpha/(1+\alpha)}\right). \tag{1.74}$$

Предположим теперь, что (1.69) не удовлетворено, следовательно, существует $\delta_* > 0$, а также последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \delta_0^{1+\alpha})$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, и $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, T]$ такие, что

$$x_{\varepsilon_k}(t_k) \notin B_{\delta_*}(\widetilde{x}(t_k + \Theta)) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \tag{1.75}$$

Без ограничения общности можем считать, что последовательности $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходятся. Тогда пользуясь (1.74), получаем существование $\theta_* \in [\theta_1, \theta_2]$ такого, что

$$x_k(t) \to \widetilde{x}(t + \theta_*) \quad \text{при } k \to \infty \tag{1.76}$$

равномерно по отношению к $t \in [0, T]$. На основании леммы Малкина (лемма 1.4) из (1.76) заключаем, что $M_{\widetilde{x}}(\theta_*) = 0$. С другой стороны, из (1.75) имеем $\widetilde{x}(t_0 + \theta_*) \notin B_{\delta_*/2}(\widetilde{x}(t_0 + \Theta))$, где $t_0 = \lim_{k\to\infty} t_k$, и, значит, $\widetilde{x}(\theta_*) \notin B_{\delta_*/2}(\widetilde{x}(\Theta))$. Достигнутое противоречие доказывает справедливость соотношения (1.69).

Теорема доказана.

Замечание 1.4 *Доказательство теоремы 1.6 предоставляет информацию о скорости сходимости T-периодических решений системы (1.1) к простому циклу системы (1.2). Действительно, из (1.74) следует, что расстояние между траекторией T-периодического решения x_ε и простым циклом $\widetilde{x}$ имеет порядок $\varepsilon^{1/(1+\alpha)}$, где $\alpha > 0$ – произвольное заранее фиксированное число.*

В главе 3 будет установлено, что, на самом деле, имеет место бóльшая скорость, чем указанная в замечании 1.4, но это потребует значительно более долгих рассуждений.

Следствие 1.3 *Пусть $\widetilde{x}$ – простой T-периодический цикл ситемы (1.2). Предположим, что существует $\theta_0 \in [0, T]$ такое, что*

$$M_{\widetilde{x}}(\theta_0) = 0 \quad \textit{и} \quad M_{\widetilde{x}} \textit{ строго монотонна в } \theta_0. \tag{1.77}$$

Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.1) имеет T-периодическое решение x_ε, удовлетворяющее

$$x_\varepsilon(t) \to \widetilde{x}(t + \theta_0) \quad \textit{ при } \varepsilon \to 0. \tag{1.78}$$

Следствие 1.3 непосредственно вытекает из теоремы 1.6, в которой $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ взяты достаточно близкими к θ_0.

Следствие 1.4 *Предположим, что f – один раз и g – три раза непрерывно дифференцируемые функции. Пусть $\widetilde{x}$ – простой T-периодический цикл*

системы (1.2). Предположим, что для некоторого $\theta_0 \in [0, T]$ выполнено

$$M_{\widetilde{x}}(\theta_0) = M'_{\widetilde{x}}(\theta_0) = M''_{\widetilde{x}}(\theta_0) = 0, \quad M'''_{\widetilde{x}}(\theta_0) \neq 0.$$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.1) имеет T-периодическое решение x_ε, удовлетворяющее свойству (1.78).

1.3.1 Формула для фазы T-периодических решений синусоидально возмущенных систем

Предположим, что возмущенная система (1.1) имеет вид

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \left(\begin{array}{c} 0 \\ \sin\left(\dfrac{2\pi k}{T} t\right) g(x) \end{array} \right), \tag{1.79}$$

где $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция и $k \in \mathbb{N}$.

Тогда для функции Малкина (1.11) имеем следующее представление

$$M_{\widetilde{x}}(\theta) = \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\theta\right) M_{\sin} - \sin\left(\frac{2\pi k}{T}\theta\right) M_{\cos},$$

где

$$M_{\sin} = \mathrm{sign} \left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0) \right\rangle \int\limits_0^T \widetilde{z}_2(\tau) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}\tau\right) g(\widetilde{x}(\tau)) d\tau,$$

$$M_{\cos} = \mathrm{sign} \left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{z}(0) \right\rangle \int\limits_0^T \widetilde{z}_2(\tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\tau\right) g(\widetilde{x}(\tau)) d\tau.$$

Пользуясь указанным представлением и следствием 1.3, получаем следующее утверждение.

Следствие 1.5 *Пусть $\widetilde{x}$ – простой T-периодический цикл системы (1.2). Предположим, что $M_{\cos} \neq 0$. Тогда каждому числу*

$$\theta_j = \frac{T \,\mathrm{arctg}\,(M_{\sin}/M_{\cos}) + T\pi j}{2\pi k}, \quad j = 1, ..., 2k,$$

и всем достаточно малым $\varepsilon > 0$ соответствует T-периодическое решение $x_{j,\varepsilon}$ системы (1.79) такое, что

$$x_{j,\varepsilon}(t) \to \widetilde{x}(t + \theta_j) \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \quad j = 1, ..., 2k.$$

Действительно, подстановкой проверяется, что числа θ_j, $j = 1, ..., 2k$, удовлетворяют уравнению $M_{\widetilde{x}}(\theta) = 0$ и свойству $(M_{\widetilde{x}})'(\theta) \neq 0$.

Полученное следствие позволяет гарантировать существование T-периодических решений в тех случаях, где аналитическое вычисление решений порождающей системы (1.2) затруднительно, а проверка справедливости неравенства $M_{\cos} \neq 0$ возможна.

Пример 1.1 Для обобщенной системы Хищник-Жертва (см. [9], §5.3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1 x_1 - \frac{k_2 x_1 x_2}{k_0 + x_1} - k_3 x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_4 x_1 x_2}{k_0 + x_1} - k_5 x_2 + \varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^-) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \end{aligned} \tag{1.80}$$

где $a^+ := \max\{a, 0\}$, $a^- := \max\{-a, 0\}$, допускающей в определенной области изменения параметров $k_0, ..., k_5$ простой цикл $\widetilde{x}$ некоторого периода $T > 0$, следствие 1.5 гарантирует существование по крайней мере двух T-периодических решений вблизи $\widetilde{x}$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и таких $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, при которых $M_{\cos} \neq 0$.

1.4 Сопоставление полученных результатов с имеющимися в литературе

В случае, когда

$$Q_0 x \neq x \quad \text{для любого } x \in \partial W, \tag{1.81}$$

и

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n) \neq 0, \tag{1.82}$$

задача о существовании T-периодических решений для (1.1) решена А. Капетто, Ж. Мавеном и Ф. Занолином в [50]. Они установили ([50], следствие 1), что при условиях (1.81) и (1.82) справедлива формула

$$d(I - Q_0, W) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n), \tag{1.83}$$

впервые полученная М. А. Красносельским и А. И. Перовым для общего случая неавтономной порождающей системы, см. [40] (с. 108) или [18]. В случае, когда решения системы (1.1) удовлетворяют условиям единственности и нелокальной продолжимости, формула (1.83) для частных случаев множеств W установлена И. Берштейном и А. Халанаем [4].

Из (1.83) следует, что

$$d(I - Q_\varepsilon, W) = (-1)^n d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n) \tag{1.84}$$

для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, при условиях (1.81) и (1.82) система (1.1) имеет T-периодическое решение в W для любого T-периодического по первой переменной возмущения g и любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Заметим, что предположение (1.82) означает, что множество W обязательно содержит постоянное решение порождающей системы (1.2).

В настоящей главе условие (1.81) не требуется, то есть резрешается, чтобы ∂W содержало неподвижные точки оператора Q_0, и полученная формула (1.48) теоремы 1.2 является обобщением формулы (1.84). Отметим, что теорема 1.2 может гарантировать, что $d(I - Q_\varepsilon, W) \neq 0$ даже в случае, когда $d_{\mathbb{R}^n}(f, W \cap \mathbb{R}^n) = 0$, то есть без явного требования того, что множество W содержит постоянное решение системы (1.2).

Второй член в правой части формулы (1.48) схож с аналогичным членом формулы Красносельского-Забрейко для подсчета индекса вырожденной неподвижной точки оператора Q_0 на основе сужения этого оператора на подпространство (в нашем случае на одномерное), см. ([21], формула 24.13). Однако, соответствующая теорема, полученная М. А. Красносельским и П. П. Забрейко ([21], теорема 24.1), может быть применена только в случае, когда оператор Q_0 имеет специальную форму, гарантирующую, что Q_0 имеет только изолированные неподвижные точки. Такое свойство в рассматриваемом случае не выполнено, так как любое T-периодическое решение автономной системы (1.2) является неизолированной неподвижной

точкой оператора Q_0.

Утверждение следствия 1.2 совпадает с утверждением Капетто-Мавена-Занолина ([50], теорема 2), но в последней работе дополнительно требуется, чтобы множество ∂W не содержало T-периодических решений системы (1.2).

В работе [29] И. Г. Малкиным установлен следующий результат (см. [29], утверждение с. 638 или [30], теоремы сс. 387 и 392). *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – *один раз и* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – *два раза непрерывно дифференцируемые функции. Пусть* $\widetilde{x}$ – *простой* T*-периодический цикл системы (1.2). Предположим, что существует* $\theta_0 \in [0,T]$ *такое, что* $M_{\widetilde{x}}(\theta_0) = 0$ *и*

$$(M_{\widetilde{x}})'(\theta_0) \neq 0. \tag{1.85}$$

Тогда, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *система (1.1) допускает* T*-периодическое решение* x_ε*, удовлетворяющее свойству*

$$x_\varepsilon(t) \to \widetilde{x}(t+\theta_0) \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{1.86}$$

Таким образом, установленные в настоящей главе теорема 1.6 и следствие 1.3 являются обобщением теоремы Малкина на случай, когда вместо (1.85) имеется либо свойство $M_{\widetilde{x}}(\theta_1) \cdot M_{\widetilde{x}}(\theta_2) < 0$, где $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$, либо строгая монотонность функции $M_{\widetilde{x}}$ в θ_0, а также на случай недифференцируемых правых частей.

Случай, когда (1.85) не выполнено, был исследован В. Лудом в [60]. Для того, чтобы сформулировать его результат, введем некоторые обозначения. Вначале, повернем и перенесем координатные оси так, что $\widetilde{x}(0) = 0$ и $\dot{\widetilde{x}}(0) = (\widetilde{x}_1(0), 0, ..., 0)$. Пусть Ω_ε – оператор сдвига по траекториям возмущенной системы (1.1). Положим $F(\xi,\varepsilon) = \Omega_\varepsilon(T,0,\xi) - \xi$, так как цикл $\widetilde{x}$ простой, то $n-1$ уравнений системы $F(\xi,\varepsilon) = 0$ могут быть решены вблизи 0 по отношению к ξ^k, где $k \in \{1,2,...,n\}$, и в результате получим скалярное уравнение $H(u,\varepsilon) = 0$. Пусть $D_{\widetilde{x}}$ – дескриминант уравнения

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3 H}{\partial u^2 \partial \varepsilon}(0,0)m^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 H}{\partial u \partial \varepsilon^2}(0,0)m + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 H}{\partial \varepsilon^3}(0,0) = 0.$$

В. Луд ([60], теорема 2) установил, что *если f – три раза и g – два раза непрерывно дифференцируемые функции,*

$$D_{\widetilde{x}} > 0, \tag{1.87}$$

и для некоторого $\theta_0 \in [0,T]$ удовлетворяющего $M_{\widetilde{x}}(\theta_0) = 0$ выполнено $(M_{\widetilde{x}})'(\theta_0) = 0$ и

$$(M_{\widetilde{x}})''(\theta_0) = 0, \tag{1.88}$$

то для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.1) имеет T-периодическое решение x_ε, удовлетворяющее условию сходимости (1.86).

В случае, когда $M_{\widetilde{x}}(\cdot)$ – тождественный нуль, В. Луд в [60] выводит из приведенного результата теорему о существовании T-периодических решений для (1.1) вблизи $\widetilde{x}$. Но даже в случае, когда $(M_{\widetilde{x}})'''(\theta_0) \neq 0$, проверка условия (1.87) – далеко не очевидная задача (здесь предполагается, что g три раза непрерывно дифференцируемая функция). Это замечание обуславливает актуальность следствия 1.4 настоящей главы.

Близкие следствию 1.5 результаты имеются в книге Дж. Гукенхеймера и Ф. Холмса [10] (пример с. 250-251), но в них, во-первых, рассматривается не функция Малкина, а функция Мельникова (см. замечание 2.2 по поводу соответствующего определения), во-вторых, предполагается непрерывная дифференцируемость входящей в правую часть системы (1.1) функции g. Вычисление функций Малкина для широкого класса возмущенных систем проведено в книге И. И. Блехмана [5], но указанные в следствии 1.5 формулы там отсутствуют.

Отметим, что ситуация, когда периоды возмущения и порождающего цикла несоизмеримы, изучена в монографии В. И. Арнольда [3].

Обсудим кратко публикации автора диссертации по результатам настоящей главы. Преобразование системы, рассмотренное в лемме 1.1, указано в ([24], формула 6). Основная теорема главы (теорема 1.2), связанная с вычислением степени $d(I - Q_\varepsilon, W)$ и на которой основан геометрический вариант

решения задачи И. Г. Малкина (теорема 1.6), опубликована в [28]. Формулы для фазы T-периодических решений синусоидально возмущенных систем (следствие 1.5) в случае дважды непрерывно дифференцируемых систем получены в [27] (см. утверждения с. 151–152). Рассмотрение примера 1.1, связанного с моделью Хищник-Жертва, проведено автором в [61].

Глава 2

Возмущения систем, допускающих семейство T-периодических решений, начальные условия которых заполняют границу некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$

В этой главе изучается задача о существовании T-периодических решений в системе вида

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{2.1}$$

лежащих в заданном открытом ограниченном множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, граница ∂U которого состоит из начальных условий T-периодических решений порождающей системы

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.2}$$

Полученные результаты позволят также указать условия существования таких T-периодических решений для (2.1), начальные условия которых близки к границе множества U. Рассмотрение этой ситуации мотивировано задачей о рождении T-периодических решений двумерной системы (2.1) из цикла $\widetilde{x}$ системы (2.2), в случае, когда последняя автономна. Цикл $\widetilde{x}$ играет в этом случае роль границы множества $U \subset \mathbb{R}^2$ (см. теорему 2.5 настоящей главы).

Всюду предполагается, что $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемая и $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная T-периодические по первой переменной функции.

Для решения поставленной задачи рассматривается вопрос о вычислении топологической степени $d(I - Q_\varepsilon, W_U)$ эквивалентного интегрального оператора

$$(Q_\varepsilon x)(t) = x(T) + \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t g(\tau, x(\tau), \varepsilon)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

на множестве

$$W_U = \{\widehat{x} \in C([0,T], \mathbb{R}^n) : \widehat{x}(t) \in U \text{ для любого } t \in [0,T]\}.$$

2.1 Формула для вычисления топологической степени интегрального оператора, эквивалентного задаче о T-периодических решениях с начальными условиями в U

Распространенным инструментом изучения систем вида (2.1) является следующая вспомогательная система (см. [29], формула 3.8)

$$\dot{y} = f'_{(2)}(t, \Omega(t,0,\xi))y + g(t, \Omega(t,0,\xi), 0), \tag{2.3}$$

где Ω – оператор сдвига по траекториям системы (2.2) и $\xi \in \mathbb{R}^n$ – параметр.

Определение 2.1 *Функция $\Phi^s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданная для каждого $s \in [0,T]$ как*

$$\Phi^s(\xi) = \eta(T, s, \xi) - \eta(0, s, \xi),$$

где $\eta(\cdot, s, \xi)$ – решение системы (2.3), удовлетворяющее начальному условию $\eta(s, s, \xi) = 0$, называется обобщенным оператором усреднения по отношению к T-периодической системе (2.1).

Пусть Φ^s – обобщенный оператор усреднения, соответствующий системе (2.1) и $\mathcal{P}_0$ – оператор Пуанкаре системы (2.2). Нам понадобится следующее свойство.

Лемма 2.1 *Для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $s, \theta \in [0, T]$ справедлива формула*

$$\eta(\theta, s, \xi) = \Omega'_{(3)}(\theta, 0, \xi) \int\limits_s^\theta \Omega'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi)) g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau.$$

Если дополнительно известно, что $\mathcal{P}_0(\xi) = \xi$, то

$$\Phi^s(\xi) = \int\limits_{s-T}^s \Omega'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi)) g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau$$

при всех $s \in [0, T]$.

Доказательство. Заметим (см. [20], теорема 2.1), что матрица $\Omega'_{(3)}(t, 0, \xi)$ является фундаментальной матрицей для линейной системы

$$\dot{y} = f'_{(2)}(t, \Omega(t, 0, \xi)) y,$$

причем $\Big(\Omega'_{(3)}(t, 0, \xi)\Big)^{-1} = \Omega'_{(3)}(0, t, \Omega(t, 0, \xi))$. Действительно, дифференцируя по ξ тождество

$$\Omega(0, t, \Omega(t, 0, \xi)) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

получаем

$$\Omega'_{(3)}(0, t, \Omega(t, 0, \xi)) \Omega(t, 0, \xi) = I, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Следовательно, по формуле вариации произвольной постоянной для неоднородной системы (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \eta(t, s, \xi) \;&=\; \int\limits_s^t \Omega'_{(3)}(t, 0, \xi) \left(\Omega(\tau, 0, \xi)\right)^{-1} g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau = \\ &=\; \Omega'_{(3)}(t, 0, \xi) \int\limits_s^t \Omega'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi)) g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau. \end{aligned}$$

Первая формула леммы доказана, переходим к доказательству второй формулы. Имеем

$$\Phi^s(\xi) = \Omega'_{(3)}(T,0,\xi)\int\limits_s^T \left(\Omega(\tau,0,\xi)\right)^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau -$$

$$-\int\limits_s^0 \left(\Omega(\tau,0,\xi)\right)^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau. \tag{2.5}$$

Производя замену переменных $\tau = u + T$ в интеграле

$$J = \Omega'_{(3)}(T,0,\xi)\int\limits_s^T \left(\Omega(\tau,0,\xi)\right)^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau,$$

и учитывая, что $\mathcal{P}_0(\xi) = \xi$, получаем

$$J = \Omega'_{(3)}(T,0,\xi)\int\limits_{s-T}^0 \left(\Omega(T+u,0,\xi)\right)^{-1} g(T+u,\Omega(T+u,0,\xi),0)du =$$

$$= \Phi(T)\mathrm{e}^{\Lambda T}\int\limits_{s-T}^0 \left(\Omega(T+u,0,\xi)\right)^{-1} g(u,\Omega(u,0,\xi),0)d\tau =$$

$$= \Phi(T)\int\limits_{s-T}^0 \mathrm{e}^{-\Lambda u}\mathrm{e}^{\Lambda(T+u)} \left(\Omega(T+u,0,\xi)\right)^{-1} g(u,\Omega(u,0,\xi),0)d\tau,$$

где $\Phi(t)\mathrm{e}^{\Lambda t}$ – представление Флоке нормированной при $t=0$ фундаментальной матрицы $\Omega'_{(3)}(t,0,\xi)$ (см. [11], Гл. III, § 15). Так как $\mathrm{e}^{\Lambda t}\left(\Omega(t,0,\xi)\right)^{-1} = \Phi^{-1}(t)$, то

$$\mathrm{e}^{\Lambda(T+u)}\left(\Omega(T+u,0,\xi)\right)^{-1} = \mathrm{e}^{\Lambda u}\left(\Omega(u,0,\xi)\right)^{-1}$$

и

$$J = \Phi(0)\int\limits_{s-T}^0 \mathrm{e}^{-\Lambda u}\mathrm{e}^{\Lambda u}\left(\Omega(u,0,\xi)\right)^{-1} g(u,\Omega(u,0,\xi),0)d\tau =$$

$$= \int\limits_{s-T}^0 \left(\Omega(u,0,\xi)\right)^{-1} g(u,\Omega(u,0,\xi),0)d\tau.$$

Подставляя полученное выражение в (2.5), получаем

$$\Phi^s(\xi) = \int\limits_{s-T}^{0} (\Omega(\tau,0,\xi))^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{0}^{s} (\Omega(\tau,0,\xi))^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau =$$

$$= \int\limits_{s-T}^{s} (\Omega(\tau,0,\xi))^{-1} g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau.$$

Лемма доказана.

Имеет место следующий результат.

Теорема 2.1 *Пусть* $\mathcal{P}_0(\xi) = \xi$ *для любого* $\xi \in \partial U$. *Если*

$\Phi^s(\xi) \neq 0$ *для любого* $\xi \in \partial U$ *и любого* $s \in [0,T]$,

то существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *справедливы следующие утверждения*

1) для любого $x \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ *такого, что* $Q_\varepsilon x = x$ *имеем* $x(t) \notin \partial U$ *для всех* $t \in [0,T]$, *в частности, оператор* Q_ε *не имеет неподвижных точек на* ∂W_U;

2) $d(I - Q_\varepsilon, W_U) = d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U)$.

Доказательство. Положим

$$\Upsilon_\varepsilon(t,\xi) = \Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\xi))g(t,\Omega(t,0,\xi),\varepsilon).$$

Согласно лемме 1.1 каждой неподвижной точке из W_U оператора Q_ε соответствует неподвижная точка (1.5) оператора

$$(G_\varepsilon\nu)(t) = \Omega(T,0,\nu(T)) + \int\limits_{0}^{t} \Upsilon_\varepsilon(\tau,\nu(\tau))d\tau,$$

которая, как легко проверить, вновь принадлежит W_U. Следовательно, если $d(I - G_\varepsilon, W_U)$ определен, то в силу теоремы об эквивалентных векторных

полях (см. [21], теорема 26.4) имеем

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U) = d(I - G_\varepsilon, W_U).$$

В пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ рассмотрим вспомогательный вполне непрерывный оператор

$$(A_\varepsilon \nu)(t) = \Omega(T, 0, \nu(T)) - \varepsilon \int\limits_0^T \Upsilon_\varepsilon(\tau, \nu(\tau)) d\tau$$

и покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ поля $I - G_\varepsilon$ и $I - A_\varepsilon$ гомотопны на границе множества W_U. Зададим следующую деформацию

$$D_\varepsilon(\lambda, \nu)(t) = \nu(t) - \Omega(T, 0, \nu(T)) - \varepsilon \int\limits_0^{\lambda t + (1-\lambda)T} \Upsilon_\varepsilon(\tau, \nu(\tau)) d\tau,$$

соединяющую поля G_ε и $G_{1,\varepsilon}$. Покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ деформация D_ε невырождена на границе множества W_U. Для этого докажем более сильное утверждение, которое используем затем для доказательства утверждения 1). Именно, покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\lambda \in [0,1]$ каждое решение уравнения $D_\varepsilon(\lambda, \nu) = \nu$ удовлетворяет условию $\nu(t) \notin \partial U$ при всех $t \in [0,T]$. Предположим, что это не так. Тогда для произвольной последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ такой, что $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$ найдутся последовательности $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ и $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C([0,T],\mathbb{R}^n)$, при которых

$$\nu_k(t) = \Omega(T, 0, \nu_k(T)) + \varepsilon_k \int\limits_0^{\lambda_k t + (1-\lambda_k)T} \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, \nu_k(\tau)) d\tau, \quad t \in [0,T] \tag{2.6}$$

и

$$\nu_k([0,T]) \cap \partial U \neq \emptyset. \tag{2.7}$$

Так как последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится. Из (2.7) следует, что функции последовательности $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничены. Поэтому, на основании непрерывности функции Υ_{ε_k} найдется константа $c_0 > 0$

такая, что $\Upsilon_{\varepsilon_k}(t, \nu_k(t)) \le c_0$, $t \in [0,T]$, $k \in \mathbb{N}$, и для любых $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $k \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$\|\nu_k(t_2) - \nu_k(t_1)\| = \varepsilon_k \left\| \int\limits_{\lambda_k t_1 + (1-\lambda_k)T}^{\lambda_k t_2 + (1-\lambda_k T)} \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, z_k(\tau))d\tau \right\| \le \varepsilon_k \lambda_k (t_2 - t_1) c_0,$$

из которой следует, что функции последовательности $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ равностепенно непрерывны. Значит, применяя теорему Арцела, из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому мы без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится. Положим $\lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$ и $\nu_0 = \lim_{k\to\infty} \nu_k$. Тогда $\lambda_0 \in [0,1]$ и $\nu_0([0,T]) \cap \partial U \ne \emptyset$. Так как $\dot{\nu}_k \to 0$ при $k \to \infty$, то функция ν_0 постоянна. Соотношение (2.7) эквивалентно существованию числа $t_k \in [0,T]$ такого, что $\nu_k(t_k) \in \partial U$. Тогда

$$\Omega(T, 0, \nu_k(t_k)) = \nu_k(t_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Вычитая из равенства (2.6), записанного при $t = T$, это же равенство, записанное при $t = t_n$, получаем

$$\nu_k(T) - \nu_k(t_k) = \varepsilon_k \int\limits_{\lambda_k t_k + (1-\lambda_k)T}^{T} \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, \nu_k(\tau))d\tau. \tag{2.9}$$

На основании (2.8) выражение (2.6) при $t = T$ можно переписать в виде

$$\nu_k(T) - \nu_k(t_k) = \Omega(T, 0, \nu_k(T)) - \Omega(T, 0, \nu_k(t_k)) + \\ + \varepsilon_k \int\limits_0^T \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, z_k(\tau))d\tau$$

или

$$(I - \Omega'_{(3)}(T, 0, \nu_k(t_k)))(\nu_k(T) - \nu_k(t_k)) = \\ = \varepsilon_k \int\limits_0^T \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, \nu_k(\tau))d\tau + o(\nu_k(t_k), \nu_k(T) - \nu_k(t_k)), \tag{2.10}$$

где функция $o(\xi, h)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\|o(\xi,h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{при } \|h\| \to 0,\ \xi \in \mathrm{R}^k. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.9) в (2.10), получаем равенство

$$(I - \Omega'_{(3)}(T,0,\nu_k(t_k))) \int\limits_{\lambda_k t_k + (1-\lambda_k)T}^{T} \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, \nu_k(\tau))d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau,\nu_k(\tau))d\tau + \frac{o(\nu_k(t_k), \nu_k(T) - \nu_k(t_k))}{\varepsilon_k}. \tag{2.12}$$

Из (2.9) следует, что найдется константа $c > 0$ такая, что

$$\|\nu_k(T) - \nu_k(t_k)\| \le c\varepsilon_k.$$

Откуда

$$\left\|\frac{o(\nu_k(t_k), \nu_k(T) - \nu_k(t_k))}{\varepsilon_k}\right\| \le c\frac{\|o(\nu_k(t_k), \nu_k(T) - \nu_k(t_k))\|}{\|\nu_k(T) - \nu_k(t_k)\|}. \tag{2.13}$$

Из (2.13), учитывая то, что значения функций ν_k ограничены равномерно по $k \in \mathbb{N}$, следует, что

$$\left\|\frac{o(\nu_k(t_k), \nu_k(T) - \nu_k(t_k))}{\varepsilon_k}\right\| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.14}$$

Совершив, учитывая (2.14), предельный переход при $k \to \infty$ в (2.12), получим

$$(I - \Omega'_{(3)}(T,0,\xi_0)) \int\limits_s^T \Upsilon_0(\tau,\xi_0)d\tau = \int\limits_0^T \Upsilon_0(\tau,\xi_0)d\tau$$

или

$$\int\limits_s^T \Omega'_{(3)}(T,0,\xi_0)\Omega'_{(3)}(0,\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0))g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0),0)d\tau -$$

$$- \int\limits_s^0 \Omega'_{(3)}(0,\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0))g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0),0)d\tau = 0, \tag{2.15}$$

где $s = \lim_{k\to\infty}(\lambda_k t_k + (1-\lambda_k)T) \in [0,T]$. Пользуясь леммой 2.1, равенство (2.15) можно переписать в виде

$$\eta(T, s, \xi_0) - \eta(0, s, \xi_0) = 0,$$

в чем противоречие с условием теоремы. Таким образом, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\lambda \in [0,1]$ каждое решение уравнения $D_\varepsilon(\lambda, \nu) = \nu$ удовлетворяет условию $\nu(t) \notin \partial U$ при всех $t \in [0,T]$. При $\lambda = 1$ полученный результат совпадает с утверждением 1) теоремы. Перейдем к доказательству утверждения 2). Как уже говорилось, доказанное свойство означает, в частности, что

$$D_\varepsilon(\lambda, \nu) \neq 0,\ \lambda \in [0,1],\ \nu \in \partial W_U,\ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{2.16}$$

то есть поля $I - G_\varepsilon$ и $I - A_\varepsilon$ гомотопны на границе множества W_U при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Обозначим через $C_0([0,T], \mathbb{R}^n)$ подпространство пространства $C([0,T], \mathbb{R}^n)$, состоящее из всех постоянных функций, определенных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$. Имеем $A_\varepsilon(\partial W_U) \subset C_0([0,T], \mathbb{R}^n)$. Далее, по построению множество W_U содержит функции, тождественно равные произвольному фиксированному элементу из U. Наконец, из (2.16) при $\lambda = 0$ получаем

$$A_\varepsilon(\nu) \neq \nu,\ \nu \in \partial W_U,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

откуда, учитывая соотношение $\partial(W_U \cap C_0([0,T], \mathbb{R}^n)) \subset \partial W_U$, следует, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ поле $I - A_\varepsilon$ не имеет нулей на границе множества $W_U \cap C_0([0,T], \mathbb{R}^n)$. Поэтому, при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ законно сужение поля $I - A_\varepsilon$ на подпространство $C_0([0,T], \mathbb{R}^n)$, что означает (см. [21], теорема 27.1)

$$\begin{gathered} d_{C([0,T],\mathbb{R}^n)}(I - A_\varepsilon, W_U) = \\ = d_{C_0([0,T],\mathbb{R}^n)}(I - A_\varepsilon, W_U \cap C_0([0,T], \mathbb{R}^n)), \end{gathered} \tag{2.17}$$

где в левой и правой частях равенства записаны топологические степени в пространствах $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $C_0([0,T], \mathbb{R}^n)$ соответственно.

Заметим, что постоянная функция $\nu \in W_U \cap C_0([0,T],\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда является решением уравнения $A_\varepsilon \nu = \nu$, когда элемент $\xi = \nu(0)$ является решением уравнения $A^0_\varepsilon \xi = \xi$, где

$$A^0_\varepsilon \xi = \Omega(T,0,\xi) + \varepsilon \int\limits_0^T \Upsilon_\varepsilon(\tau,\xi)d\tau.$$

Применяя теорему об эквивалентных уравнениях к уравнениям $A_\varepsilon \nu = \nu$ и $A^0_\varepsilon \xi = \xi$ (см. [21], теорема 26.4), при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ получаем

$$d_{C_0([0,T],\mathbb{R}^n)}(I - A_\varepsilon, W_U \cap C_0([0,T],\mathrm{R}^n)) = d_{\mathbb{R}^n}(I - A^0_\varepsilon, U). \tag{2.18}$$

Для вычисления топологической степени $\mathrm{d}_{\mathbb{R}^n}(I - A^0_\varepsilon, U)$ положим

$$A_{1,\varepsilon}\xi = -\varepsilon \int\limits_0^T \Upsilon_\varepsilon(\tau,\xi)d\tau.$$

Из условия теоремы следует, что $(I - A^0_\varepsilon)(\xi) = A_{1,\varepsilon}\xi,\ \ \xi \in \partial U$, поэтому при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ имеем

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - A^0_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^n}(A_{1,\varepsilon}, U). \tag{2.19}$$

Покажем, что векторные поля $A_{1,\varepsilon}$ и $A_{1,1}$ гомотопны на границе множества U при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Зададим линейную деформацию

$$D_{1,\varepsilon}(\lambda,\xi) = (\lambda\varepsilon + 1 - \lambda) \int\limits_0^T \Upsilon_\varepsilon(\tau,\xi)d\tau, \quad \xi \in U.$$

Покажем, что эта деформация невырождена на границе множества U. Предположим, что это не так, тогда для некоторых $\lambda \in [0,1],\ \ \xi \in \partial U$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ будем иметь

$$(\lambda_0\varepsilon + 1 - \lambda) \int\limits_0^T \Upsilon_\varepsilon(\tau,\xi)d\tau = 0,$$

откуда

$$\int\limits_0^T \Upsilon_\varepsilon(\tau,\xi)d\tau = 0,$$

в чем противоречие с невырожденностью поля $A_{1,\varepsilon}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на ∂U. Таким образом, пользуясь леммой 2.1,

$$d_{\mathbb{R}^n}(A_{1,\varepsilon}, U) = d_{\mathbb{R}^n}(A_{1,1}, U) = d_{\mathbb{R}^n}(\eta(0, T, \cdot), U). \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) в (2.19), получаем

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - A^0_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^n}(\eta(0, T, \cdot), U), \ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{2.21}$$

Подставляя (2.18) в (2.17), пользуясь гомотопностью полей $I - A_\varepsilon$ и $I - G_\varepsilon$ и соотношением (2.21), окончательно имеем

$$d_{C([0,T],\mathbb{R}^n)}(I - G_\varepsilon, W_U) = d_{\mathbb{R}^n}(-\eta(T, 0, \cdot), U), \ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Теорема доказана.

Предположим теперь, что

$(A_{\mathcal{P}})$ решение x системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = \xi$ существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0, T]$ при любых $t_0 \in [0, T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$.

При условии $(A_{\mathcal{P}})$ для системы (2.1) при любых $\varepsilon > 0$ определен оператор $\mathcal{P}_\varepsilon$ Пуанкаре, соответствующий задаче о T-периодических решениях для (2.1) (см. определение 1.2).

Теорема 2.2 *Пусть $\mathcal{P}_0(\xi) = \xi$ для любого $\xi \in \partial U$. Пусть выполнено условие $(A_{\mathcal{P}})$, и*

$\Phi^s(\xi) \neq 0$ *для любого $\xi \in \partial U$ и любого $s \in [0, T]$.*

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оператор $\mathcal{P}_\varepsilon$ невырожден на ∂U, и

$d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$

Доказательство. Пусть Q_ε – интегральный оператор, соответствующий задаче о T-периодических решениях для (2.1). Положим

$$W_\varepsilon = \{\hat{x} : C([0, T], \mathbb{R}^n) : \Omega_\varepsilon(0, t, \hat{x}(t)) \in U, \text{ для любого } t \in [0, T]\},$$

где через Ω_ε обозначен оператор сдвига по траекториям системы (2.1). Покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого $\alpha \in [0, \varepsilon_0]$ выполнено:

$$\text{если } Q_\varepsilon x = x \text{ и } x \in \overline{W}_\alpha, \text{ то } x \in W_0. \tag{2.22}$$

Предположим противное, следовательно, существуют последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_0]$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $x_n \in \overline{W}_{\alpha_n}$ такие, что $Q_{\varepsilon_n} x_n = x_n$ и $x_n \notin W_0$. Так как $x_n \in \overline{W}_{\varepsilon_n}$, то $x_n(0) \in U$. С другой стороны, из соотношения $x_n \notin W_0$ заключаем, что при любом $n \in \mathbb{N}$ существует $t_n \in (0, T]$ такое, что $x_n(t_n) \in \partial U$, в чем противоречие с утверждением 1) теоремы 2.1.

Из (2.22) заключаем, что степень $d(I - Q_\lambda, W_\lambda)$ определена при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, и

$$d(I - Q_\varepsilon, W_\varepsilon) = d(I - Q_\varepsilon, W_0), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Из принципа родственности (см. [21], теорема 28.5) следует, что

$$d(I - Q_\varepsilon, W_\varepsilon) = d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U).$$

С другой стороны, в силу утверждения 2) теоремы 2.1 имеем

$$d(I - Q_\varepsilon, W_0) = d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U).$$

Теорема доказана.

2.2 Теоремы о продолжении T-периодических решений из $\overline{U}$ по параметру

В этом пункте будут указаны приложения теоремы 2.1 к задаче о продолжении лежащих в $\overline{U}$ T-периодических решений системы (2.1) при увеличении параметра ε от нуля до некоторого достаточно малого положительного числа.

2.2.1 Случай систем любого числа уравнений

Теорема 2.3 *Если* $\Phi^s(\xi) \neq 0$ *для любого* $\xi \in \partial U$ *и любого* $s \in [0, T]$, *и*

$$d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U) \neq 0,$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *система (2.1) имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение с начальным условием в* U.

Предположим теперь, что выполнено условие $(A_{\mathcal{P}})$ (см. теорему 2.2), и пусть $\mathcal{P}_\varepsilon$ – оператор Пуанкаре, соответствующий задаче о T-периодических решениях для возмущенной системы (2.1). Предположим далее, что

(A_*) отображение $\mathcal{P}_0$ имеет конечное число $a_1, ..., a_k$ неподвижных точек в U, при этом для любого $i \in \overline{1,k}$ матрица $(I - (\mathcal{P}_0)')\,(a_k)$ невырождена. При условии (A_*) каждому a_i, $i \in \overline{1,k}$ можно поставить в соответствие индекс Пуанкаре $\mathrm{ind}(a_i, I - \mathcal{P}_0)$ (см. [23], Гл. IX, § 4), который в этом случае определяется как $(-1)^\beta$, где β – сумма кратностей вещественных и отрицательных собственных значений матрицы $(I - (\mathcal{P}_0)')\,(a_k)$ (см. [21], теорема 6.1).

Справедлив следующий результат.

Теорема 2.4 *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2, а также предположение* (A_*). *Предположим, что*

$$\mathrm{ind}(a_1, I - \mathcal{P}_0) + \cdots + \mathrm{ind}(a_k, I - \mathcal{P}_0) \neq d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U). \tag{2.23}$$

Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *система (2.1) имеет* T*-периодическое решение* $x_\varepsilon(t)$ *такое, что*

$$\rho(x_\varepsilon(0), \partial U) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.24}$$

Доказательство. Из (A_*) следует, что точки $a_1, ..., a_k$ являются изолированными. Поэтому (см. [20], теорема 6.1), существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_0, B_{\delta_0}(a_i)) = \mathrm{ind}(a_i, I - \mathcal{P}_0), \quad i \in \overline{1,k}.$$

Далее, при условии (A_*) в силу теоремы Пуанкаре (см. [30], утверждение с. 378) $\delta_0 > 0$ может быть выбрано еще настолько малым, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $i \in \overline{1,k}$ существует единственное T-периодическое решение системы (2.1) в δ_0-окрестности точки a_i. Из теоремы 2.2 следует, что $\varepsilon_0 > 0$ может быть выбрано настолько малым, что

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^n}(-\Phi^T, U), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Наконец, уменьшим $\varepsilon_0 > 0$ еще и так, что

$$d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_0, B_{\delta_0}(a_i)) = d_{\mathbb{R}^n}(I - \mathcal{P}_\varepsilon, B_{\delta_0}(a_i)), \quad i \in \overline{1,k},\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Суммируя полученные соотношения и учитывая (2.23), приходим к выводу, что

$$d_{\mathbb{R}^n}\left(I - \mathcal{P}_\varepsilon, U \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_{\delta_0}(a_i)\right) \neq 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Следовательно, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует решение x_ε системы (2.1) такое, что

$$x_\varepsilon(0) \in U \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_{\delta_0}(a_i), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Заметим, что

$$\rho(x_\varepsilon(0), \partial U) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{2.25}$$

Действительно, в противном случае имели бы противоречие с единственностью T-периодических решений с рожденными из точек $a_1, ..., a_k$ начальными условиями.

Теорема доказана.

2.2.2 Случай двумерных систем, допускающих цикл в отсутствии возмущения

Следующее приложение теоремы 2.1 связано со случаем, когда система (2.2) двумерна и автономна, то есть имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.26}$$

соответствующая возмущенная система (2.1) запишется в этом случае как

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.27}$$

Предположим, что система (2.26) имеет T-периодический цикл $\widetilde{x}$, и обозначим через U внутренность цикла. Очевидно, $\Omega(T, 0, \xi) = \xi$ для любого $\xi \in \partial U$.

Теорема 2.5 *Предположим, что*

$\Phi^s(\xi) \neq 0$ *для любого* $\xi \in \partial U$ *и любого* $s \in [0, T]$,

(A_1) $\widetilde{x}$ *– единственный* T*-периодический цикл системы (2.26) в некоторой окрестности* ∂U.

Тогда, если

$d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U) \neq 1$,

то существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система (2.27) имеет по крайней мере два* T*-периодических решения* $x_{\varepsilon,1}$ *и* x_{ε_2} *таких, что*

$$\rho(x_{\varepsilon,1}(t), \partial U) + \rho(x_{\varepsilon,2}(t), \partial U) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Более того, $x_{\varepsilon,1}(t) \in U$, $x_{\varepsilon,2}(t) \notin U$ *при всех* $t \in [0, T]$, *и каждое прочее* T*-периодическое решение* x *системы (2.27) удовлетворяет условию* $x(t) \notin \partial U$ *при всех* $t \in [0, T]$.

Условие (A_1) не отрицает существования вблизи ∂U циклов системы (2.26) с отличными от $T > 0$ периодами.

Доказательство теоремы 2.5. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ – то, о котором говорится в теореме 2.1, тогда

$$d(Q_\varepsilon, W_U) = d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U) \quad \text{для любых } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

или, учитывая условие $d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U) \neq 1$,

$$d(Q_\varepsilon, W_U) \neq 1 \quad \text{для любых } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{2.28}$$

Положим $U_\delta^- = U \backslash B_\delta(\partial U)$, $U_\delta^+ = U \cup B_\delta(\partial U)$. На основании условия (A_1) можно зафиксировать такое $\delta_0 > 0$, что система (2.26) не имеет T-периодических решений с начальными условиями из $\partial U_\delta^- \cup \partial U_\delta^+$ при всех $\delta \in (0, \delta_0]$. Без ограничения общности можем считать, что $\delta_0 > 0$ выбрано достаточно малым так, что $U_{\delta_0}^- \neq \emptyset$. По теореме Капетто-Мавена-Занолина ([50], следствие 1) имеем

$$d(Q_0, W_{U_\delta^-}) = d_{\mathbb{R}^2}(f, U_\delta^-) \text{ и } d(Q_0, W_{U_\delta^+}) = d_{\mathbb{R}^2}(f, U_\delta^+), \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

Без ограничения общности можно считать, что малость $\delta_0 > 0$ достаточна для того, чтобы

$$d_{\mathbb{R}^2}(f, U_\delta^-) = d_{\mathbb{R}^2}(f, U_\delta^+) = d_{\mathbb{R}^2}(f, U), \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

По теореме Пункаре (см. С. Лефшец [23], теорема 11.1 или М. А. Красносельский и др. [8], теорема 2.3) имеем $d_{\mathbb{R}^2}(f, U) = 1$, поэтому

$$d(Q_0, W_{U_\delta^-}) = d(Q_0, W_{U_\delta^+}) = 1 \quad \text{при всех } \delta \in (0, \delta_0].$$

Таким образом, каждому $\delta \in (0, \delta_0]$ соответствует $\varepsilon_\delta > 0$ такое, что

$$d(Q_\varepsilon, W_{U_\delta^-}) = d(Q_\varepsilon, W_{U_\delta^+}) = 1, \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta],\ \delta \in (0, \delta_0]. \tag{2.29}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_\delta < \varepsilon_0$ при всех $\delta \in (0, \delta_0]$. Тогда из (2.28) и (2.29) получаем, что при всех $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta]$ система (2.27) имеет по крайней мере два T-периодических решения $x_{\varepsilon,1} \in W_U \backslash W_{U_\delta^-}$ и $x_{\varepsilon,2}(t) \in W_{U_\delta^+} \backslash W_U$. Из этого, в частности, имеем $x_{\varepsilon,1}(0) \in U$, $x_{\varepsilon,2}(t)(0) \notin$

U и, используя утверждение 1) теоремы 2.1, заключаем, что $x_{\varepsilon,1}(t) \in U$, $x_{\varepsilon,2}(t)(t) \notin U$ при всех $t \in [0, T]$.

Теорема доказана.

2.2.3 Случай двумерных систем, допускающих семейство циклов в отсутствии возмущения

Обозначим через $\widetilde{x}$ периодическое решение системы (2.26) наименьшего периода T. В этом подпункте предполагается, что

(C) алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ системы

$$\dot{y} = f'(\widetilde{x}(t))y \tag{2.30}$$

равна 2.

Последнее имеет место, в частности, в случае, когда $\widetilde{x}$ вложен в семейство циклов системы (2.26). Обозначим через $U \subset \mathbb{R}^2$ внутренность цикла $\widetilde{x}$. Нас интересует вопрос о том, существуют ли вблизи границы множества U периодические решения системы (2.27) с периодом T.

Лемма 2.2 *Предположим, что T-периодическая система*

$$\dot{u} = A(t)u \tag{2.31}$$

имеет мультипликатор $+1$ алгебраической кратности 2, и $\widetilde{u}$ – T-периодическое решение этой системы такое, что

$$\widetilde{u}_1(0) \neq 0,\ \widetilde{u}_2(0) = 0 \quad (\widetilde{u}_1(0) = 0,\ \widetilde{u}_2(0) \neq 0).$$

Тогда для решения $\widehat{u}$ системы (2.31), удовлетворяющего условию

$$\widehat{u}_1(0) = 0,\ \widehat{u}_2(0) \neq 0 \quad (\widehat{u}_1(0) \neq 0,\ \widehat{u}_2(0) = 0),$$

справедлива формула

$$\widehat{u}(t+T) = \widehat{u}(t) + \frac{\widehat{u}_1(T)}{\widetilde{u}_1(0)}\widetilde{u}(t) \quad \left(\widehat{u}(t+T) = \widehat{u}(t) + \frac{\widehat{u}_2(T)}{\widetilde{u}_2(0)}\widetilde{u}(t)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Установим справедливость утверждения в случае, когда $\widetilde{u}_1(0) \neq 0,\ \widetilde{u}_2(0) = 0$. Обозначим через X нормированную ($X(0) = I$) фундаментальную матрицу системы (2.31). Так как $X(T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $X(T) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. По условию леммы алгебраическая кратность собственного значения $+1$ матрицы $X(T)$ равна двум, значит $X(T) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{R}$ – некоторое число. Имеем

$$\begin{aligned} X(t+T)\widehat{u}(0) &= X(t)X(T)\widehat{u}(0) = X(t)\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\widehat{u}(0) = \\ &= X(t)\widehat{u}(0) + X(t)\begin{pmatrix} a\widehat{u}_2(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= X(t)\widehat{u}(0) + \frac{a\widehat{u}_2(0)}{\widetilde{u}_1(0)}\widetilde{u}(t). \end{aligned}$$

В тоже время

$$X(T)\widehat{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\widehat{u}(0) = \widehat{u}(0) + \begin{pmatrix} a\widehat{u}_2(0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $a\widehat{u}_2(0) = \widehat{u}_1(T)$.

Справедливость утверждения леммы в случае, когда $\widetilde{u}_1(0) = 0,\ \widetilde{u}_2(0) \neq 0$ устанавливается аналогично.

Лемма доказана.

Не ограничивая общности решения поставленной задачи, можем считать, что

$$\dot{\widetilde{x}}_1(0) \neq 0 \text{ и } \dot{\widetilde{x}}_2(0) = 0. \tag{2.32}$$

Пусть $\widehat{y}$ – решение системы (2.30), удовлетворяющее условию

$$\widehat{y}_1(0) = 0,\ \widehat{y}_2(0) \neq 0. \tag{2.33}$$

Обозначим через $\widetilde{z}$ и $\widehat{z}$ решения сопряженной системы

$$\dot{z} = (f'(\widetilde{x}(t)))^* z, \tag{2.34}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\widehat{z}(0) = \begin{pmatrix} 1/\dot{\widetilde{x}}_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{z}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\widehat{y}_2(0) \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

В силу леммы Перрона (см. [68] или [11], Гл. III, § 12) имеем

$$\left(\dot{\widetilde{x}}(t)\ \widehat{y}(t)\right)^* (\widehat{z}(t)\ \widetilde{z}(t)) = I, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.36}$$

Лемма 2.3 *Пусть выполнено условие* (C). *Тогда решение* $\widetilde{z}$ *является* T-*периодическим.*

Доказательство. Если $\widehat{y}_1(T) = 0$, то в силу леммы 2.2 каждое решение системы (2.30), а значит и системы (2.34), является T-периодическим. Рассмотрим случай, когда

$$\widehat{y}_1(T) \neq 0. \tag{2.37}$$

В силу теоремы о периодических решениях сопряженной системы (см. [11], Гл. III, § 23, теорема 2) система (2.30) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, обозначим это решение через $\widetilde{\widetilde{z}}$. На основании леммы 2.2 имеем

$$\left\langle \widehat{y}(T), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle = \left\langle \widehat{y}(0), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle + \frac{\widehat{y}_1(T)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \widehat{y}(0), \widetilde{\widetilde{z}}(0) \right\rangle + \frac{\widehat{y}_1(T)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \dot{\widetilde{x}}_1(0) \widetilde{\widetilde{z}}_1(0).$$

Но, в силу леммы Перрона (см. [68] или [11], Гл. III, § 12) $\left\langle \widehat{y}(T), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle = \left\langle \widehat{y}(0), \widetilde{\widetilde{z}}(0) \right\rangle$, поэтому $\widetilde{\widetilde{z}}_1(0) = 0$ и, следовательно, решения $\widetilde{z}$ и $\widetilde{\widetilde{z}}$ линейно зависимы.

Лемма доказана.

Нижеследующая лемма дает разложение поля $\Phi^s(\xi)$ по $\dot{\widetilde{x}}$ и $\widehat{y}$ для случая, когда цикл $\widetilde{x}$ удовлетворяет условию (C).

Лемма 2.4 *Пусть выполнено условие* (C)*. Тогда для любых* $s, \theta \in \mathbb{R}$ *имеет место формула*

$$\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)) = \left(\widehat{f}(\theta) - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)}\widetilde{f}(\theta, s+\theta)\right)\dot{\widetilde{x}}(\theta) + \widetilde{f}(\theta, 0)\widehat{y}(\theta), \tag{2.38}$$

где

$$\widetilde{f}(\theta, t) = \int\limits_t^T \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau,$$

$$\widehat{f}(\theta) = \int\limits_0^T \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau.$$

Доказательство. Положим $\widetilde{Z}(t) = (\widehat{z}(t), \widetilde{z}(t))$ и обозначим через $Z(t)$ фундаметальную матрицу системы (2.34) такую, что $Z(0) = I$, имеем $Z(t) = \widetilde{Z}(t)\widetilde{Z}^{-1}(0)$. По лемме Перрона (см. [68] или [11], Гл. III, § 12) $Y^{-1}(t) = Z^*(t)$, и, учитывая лемму 2.1,

$$\begin{aligned}
\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)) &= \int\limits_{s-T}^{s} (\Omega)'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \widetilde{x}(\theta)))g(\tau, \widetilde{x}(\tau+\theta), 0)d\tau = \\
&= Y(\theta) \int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} Y^{-1}(\tau)g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)d\tau = \\
&= (\widetilde{Z}^*(\theta))^{-1} \int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \widetilde{Z}^*(\tau)g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)d\tau = \\
&= (\widetilde{x}(t) \ \widetilde{y}(t)) \begin{pmatrix} \int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau \\ \widetilde{f}(\theta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Но, используя замену переменных $t = \tau + T$ в интеграле и лемму 2.2, можем провести следующее преобразование

$$\int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau + \int\limits_{s-T+\theta}^{0} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau + \int\limits_{s+\theta}^{T} \langle \widehat{z}(t-T), g(t-\theta, \widetilde{x}(t), 0)\rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_0^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{s+\theta}^{T} \left\langle \left(\widehat{z}(t) - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \widetilde{z}(t) \right), g(t-\theta, \widetilde{x}(t), 0) \right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^{T} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau), 0)\rangle \, d\tau -$$

$$- \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \int\limits_{s+\theta}^{T} \langle \widetilde{z}(t), g(t-\theta, \widetilde{x}(t), 0)\rangle \, dt = \widehat{f}(\theta) - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \widetilde{f}(\theta, s+\theta).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4 позволяет получить следующее следствие из теоремы 2.5, в котором предполагается, что цикл $\widetilde{x}$ удовлетворяет условию (2.32).

Теорема 2.6 *Пусть выполнены условия* (A_1) *и* (C). *Предположим, что для каждого* $\theta_0 \in [0, T]$ *такого, что* $\widetilde{f}(\theta_0, 0) = 0$, *имеем*

$$\left| \widehat{f}(\theta_0) \right| > \left| \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \widetilde{f}(\theta_0, s+\theta_0) \right| \quad \textit{при всех } s \in [0, T].$$

Тогда при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ *всякое* T*-периодическое решение* x *системы (2.27) необходимо таково, что* $x(t) \notin \partial U$ *при любом* $t \in [0, T]$. *Более того, если дополнительно известно, что*

(A_2) $\quad d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U) \neq 1,$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *система (2.27) имеет по крайней мере два* T*-периодических решения* $\widetilde{x}_\varepsilon$ *и* $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ *таких, что* $\widetilde{x}_\varepsilon(t) \in U$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t) \notin U$ *для любого* $t \in [0, T]$, *и*

$$\rho\left(\widetilde{x}_\varepsilon(t), \partial U\right) + \rho\left(\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t), \partial U\right) \to 0 \quad \textit{при } \varepsilon \to 0$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

В следующих двух пунктах даются приложения разработанных теорем к конкретным классам систем (2.27).

2.3 Модификация теоремы Борсука-Улама и новые свойства периодических решений уравнения Дуффинга

Пример 2.1 В качестве примера рассмотрим задачу о существовании периодических решений у уравнения Дуффинга

$$\ddot{u} + u + u^3 = \varepsilon \cos((1+\delta)t). \tag{2.39}$$

Как известно (см., например, [10], пример с. 250), при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.39) допускает семейство периодических решений, период которых изменяется монотонно от 2π до 0, когда начальное условие решения изменяется от $(0,0)$ до $(+\infty, 0)$. На основании теоремы 2.6 мы покажем, что в каждой "полуокрестности" порождающего периодического решения имеется по крайней мере одно периодическое решение уравнения (2.39) того же периода, что и порождающее.

Лемма 2.5 *Обозначим через u_δ единственное с точностью до сдвига периодическое решение невозмущенного (при $\varepsilon = 0$) уравнения Дуффинга (2.39) с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{1+\delta}$. Существует $\delta_0 > 0$, при котором каждому $\delta \in [0, \delta_0]$ соответствует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что:*

1) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение Дуффинга (2.39) имеет по крайней мере два $\frac{2\pi}{1+\delta}$-периодических решения $\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}$ и $\widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}$ таких, что значения функции $\left(\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}, \dot{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}\right)$ лежат строго внутри области $U \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной кривой $\widetilde{x}(t) = (u_\delta(t), \dot{u}_\delta(t))$, а значения функции $\left(\widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}, \dot{\widetilde{\widetilde{u}}}_{\delta,\varepsilon}\right)$ лежат строго снаружи U;

2) всякое $\frac{2\pi}{1+\delta}$-периодическое решение u системы (2.39) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

таково, что кривая $t \to (u(t), \dot{u}(t))$ *не имеет точек пересечения с кривой* $t \to (u_\delta(t), \dot{u}_\delta(t))$;

3) решения $\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}$ *и* $\widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}$ *удовлетворяют условию*

$$\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}(t) \to u_\delta\left(t - \widetilde{\theta}\right) \quad \text{и} \quad \widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}(t) \to u_\delta\left(t - \widetilde{\widetilde{\theta}}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

для некоторых $\widetilde{\theta}, \widetilde{\widetilde{\theta}} \in \left[0, \frac{2\pi}{1+\delta}\right]$.

Для доказательства леммы 2.5 нам понадобятся некоторые дополнительные утверждения. Первое из них – модификация теоремы, доказанной К. Борсуком в [47], предположение о справедливости которой ранее высказал С. Улам (см. также [8], теорема 2.2).

Лемма 2.6 *Пусть* $\widetilde{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $\widetilde{x}(0) = \widetilde{x}(T)$ *– жорданова кривая, ограничивающая множество* $U \subset \mathbb{R}^2$. *Пусть* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *– непрерывное векторное поле такое, что* $F(\xi) \neq 0$ *для каждого* $\xi \in \partial U$. *Предположим, что существует направляющая функция* $z : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $z(0) = z(T)$ *такая, что:*

1) $\left\langle z(\theta), \dot{\widetilde{x}}(\theta) \right\rangle \neq 0$ *для каждого* $\theta \in [0, T]$,

2) скалярная функция $\langle F(\widetilde{x}(\cdot)), z(\cdot) \rangle$ *имеет ровно два нуля* θ_1, θ_2 *на интервале* $[0, T)$ *и строго монотонна в этих точках,*

3) $$\operatorname{sign}\left\langle F(\widetilde{x}(\theta_1)), \begin{pmatrix} z_2(\theta_1) \\ -z_1(\theta_1) \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= -\operatorname{sign}\left\langle F(\widetilde{x}(\theta_2)), \begin{pmatrix} z_2(\theta_2) \\ -z_1(\theta_2) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Тогда либо $d(F, U) = 0$, *либо* $d(F, U) = 2$.

Доказательство. Предположим, что параметризация кривой $\widetilde{x}$ положительна, то есть множество U расположено по левую сторону относительно наблюдателя, движущегося по ∂U вместе с $\widetilde{x}(t)$, когда t возрастает от 0 до T, в противном случае, мы рассмотрим противоположную параметризацию $\widetilde{\widetilde{x}}(\theta) = \widetilde{x}(-\theta)$. Пусть $\Gamma_{\dot{\widetilde{x}}} : [0, T] \to \mathbb{R}$ – некоторая однозначная ветвь угловой

функции, связанной с вектором $\dot{\widetilde{x}}(t)$, $t \in [0,T]$, (см., например, [8], §1.2), причем такая, что $\Gamma_{\dot{\widetilde{x}}}(\theta)$ возрастает, когда вектор $\dot{\widetilde{x}}(\theta)$ вращается против часовой стрелки. На основе $\Gamma_{\dot{\widetilde{x}}}$ сейчас будет определена угловая функция $\Gamma_{F\circ\widetilde{x}}$ для вектор-функции $\theta \to F(\widetilde{x}(\theta))$.

Без ограничения общности можем считать, что $\theta_1, \theta_2 \in (0,T)$, в противном случае мы могли бы сдвинуть время в функциях $\widetilde{x}$ и z. Также можем предполагать, что $\left\langle \dot{\widetilde{x}}(\theta), z(\theta) \right\rangle > 0$ для каждого $\theta \in [0,T]$, иначе мы рассмотрели бы $\widetilde{z}(\theta) = z(-\theta)$ вместо $z(\theta)$. Обозначим через $\widehat{h_1, h_2} \in [0, 2\pi)$ угол между векторами h_1 и h_2, посчитанный в направлении против часовой стрелки, то есть $\widehat{h_1, h_2} + \widehat{h_2, h_1} = 2\pi$. Пусть $\operatorname{ind}(\theta_i, f) = +1$ или $\operatorname{ind}(\theta_i, f) = -1$ в зависимости от того возрастает или убывает f в θ_i, $i = 1, 2$. Введем функции $\angle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [-\pi, \pi]$ и $\widetilde{H}_{\theta_i} : [0,T] \to \{-1, 0, 1\}$ следующим образом

$$\angle(h_1, h_2) = \arccos \frac{\langle h_1, h_2 \rangle}{\|h_1\| \cdot \|h_2\|} \operatorname{sign}\left(\pi - \widehat{h_1, h_2}\right),$$

$$\widetilde{H}_{\theta_i}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \theta \in [0, \theta_i), \\ \operatorname{ind}(\theta_i, f) \operatorname{sign}\left\langle z(\theta_i)^{\perp}, F(\widetilde{x}(\theta_i)) \right\rangle & \text{при} \quad \theta \in [\theta_i, T]. \end{cases}$$

Для каждого $\theta \in [0,T]$ определим

$$\Gamma_{F\circ\widetilde{x}}(\theta) = \Gamma_{\dot{\widetilde{x}}}(\theta) + \angle(\dot{\widetilde{x}}(\theta), z(\theta)) + \angle(\operatorname{sign}\left\langle z(\theta), F(\widetilde{x}(\theta))\right\rangle z(\theta), F(\widetilde{x}(\theta))) +$$

$$+ \pi \widetilde{H}_{\theta_1}(\theta) + \pi \widetilde{H}_{\theta_2}(\theta). \tag{2.40}$$

Можно проверить, что функция $\Gamma_{F\circ\widetilde{x}}$ непрерывна на $[0,T]$ (для этого необходимо проверить это условие только в точках θ_1 и θ_2), и что $\Gamma_{F\circ\widetilde{x}}(\theta)$ возрастает, когда вектор $F(\widetilde{x}(\theta))$ вращается против часовой стрелки, следовательно, $\Gamma_{F\circ\widetilde{x}}(\cdot)$ является угловой функция вектора $F(\widetilde{x}(\theta))$ для $\theta \in [0,T]$. По определению числа вращения двумерных векторных полей на границах односвязных множеств (см. [8], § 1.3, формула 1.11) имеем

$$d_{\mathbb{R}^2}(F, U) = \frac{1}{2\pi}[\Gamma_{F\circ\widetilde{x}}(T) - \Gamma_{F\circ q}(0)]. \tag{2.41}$$

По теореме Пуанкаре о полной вариации угловой функции, связанной с касательным вектором $\dot{\widetilde{x}}(\theta)$, на кривой $\widetilde{x}$ (см. [8], теорема 2.4) имеем

$$\frac{1}{2\pi}[\Gamma_{\dot{\widetilde{x}}}(T) - \Gamma_{\dot{\widetilde{x}}}(0)] = 1$$

и, так как второй и третий члены в (2.40) T-периодичны, (2.41) может быть переписано как

$$d_{\mathbb{R}^2}(F, U) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ind}(\theta_1, f)\operatorname{sign}\left\langle z(\theta_1)^{\perp}, F(\widetilde{x}(\theta_1))\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \operatorname{ind}(\theta_2, f)\operatorname{sign}\left\langle z(\theta_2)^{\perp}, F(\widetilde{x}(\theta_2))\right\rangle\right]. \tag{2.42}$$

Так как функция f T-периодична, то

$$\operatorname{ind}(\theta_1, f) = -\operatorname{ind}(\theta_2, f). \tag{2.43}$$

На основании соотношений 3) и (2.43) утверждение леммы вытекает из (2.42).

Лемма доказана.

Лемма 2.7 *Рассмотрим систему*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^- + \cos(t)), \end{aligned} \tag{2.44}$$

где $a^+ := \max\{a, 0\}$, $a^- := \max\{-a, 0\}$. *Обозначим через* $U \subset \mathbb{R}^2$ *внутренность цикла* $\widetilde{x} = (\sin t, \cos t)$ *системы (2.44) с* $\varepsilon = 0$. *Тогда, если* $|\mu - \nu| \neq 2$, *то соответствующий* 2π*-периодической системе (2.44) обобщенный оператор усреднения* Φ^s *невырожден на* ∂U *при* $s \in [0, 2\pi]$. *Если же* $|\mu - \nu| < 2$, *то* $d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U) \in \{0, 2\}$.

Доказательство. Имеем

$$\widehat{f} = -\int_0^{2\pi} \sin\tau \left(\mu\widetilde{x}_1^+(\tau) + \nu\widetilde{x}_1^-(\tau) + \cos(\tau - \theta)\right) d\tau =$$

$$= -\mu\int_0^{\pi} \sin\tau \sin\tau d\tau + \nu\int_{\pi}^{2\pi} \sin\tau\sin\tau d\tau - \int_0^{2\pi} \sin\tau\cos\tau d\tau \cos\theta -$$

$$-\int_0^{2\pi} \sin\tau \sin\tau d\tau \sin\theta = -\mu\frac{\pi}{2} + \nu\frac{\pi}{2} - \pi\sin\theta,$$

$$\widetilde{f} = \int_0^{2\pi} \cos\tau \left(\mu\widetilde{x}_1^+(\tau) + \nu\widetilde{x}_1^-(\tau) + \cos(\tau-\theta)\right) d\tau =$$

$$= \mu\int_0^{\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau - \nu\int_{\pi}^{2\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau + \int_0^{2\pi} \cos\tau\cos\tau d\tau\cos\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau \sin\theta = \pi\cos\theta,$$

поэтому

$$\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)) = \frac{\pi}{2}\left(-\mu+\nu-2\sin\theta\right)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix} + \pi\cos\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Из последней формулы следует, что необходимым и достаточным условием невырожденности поля Φ^s является $|\mu-\nu|\neq 2$. Для доказательства того, что $d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U)\neq 0$ используем лемму 2.6 с $F = -\Phi^T$ и направляющей функцией $z(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Проверим выполнение условий этой леммы, имеем

$$\left\langle -\Phi^T(\widetilde{x}(\theta)), z(\theta)\right\rangle = -\frac{\pi}{2}\left(-\mu+\nu-2\sin\theta\right).$$

Так как по условию леммы $|\mu-\nu|<2$, то $\theta_0 = \arcsin\dfrac{-\mu+\nu}{2}$ будет единственным корнем уравнения $\left\langle -\Phi^T(\widetilde{x}(\theta)), z(\theta)\right\rangle = 0$ на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$. Поэтому на интервале $[0, 2\pi)$ уравнение $\left\langle -\Phi^T(\widetilde{x}(\theta)), z(\theta)\right\rangle = 0$ имеет ровно два корня

$$\theta_1 = \begin{cases} \theta_1 = \theta_0, & \text{если } \theta_0 \geq 0,\\ \theta_1 = \theta_0 + \pi, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi.$$

Далее, имеем

$$\left(\left\langle -\Phi^T(\widetilde{x}(\cdot)), z(\cdot)\right\rangle\right)'(\theta) = \cos\theta,$$

поэтому, если $\left(\left\langle -\Phi^T(\widetilde{x}(\cdot)), z(\cdot)\right\rangle\right)'(\theta_i) = 0$, то $|-\mu+\nu| = 2$, противореча условиям леммы. Таким образом, условие 2) леммы 2.6 удовлетворено. Наконец, так как

$$\operatorname{sign}\left\langle -\Phi(\widetilde{x}(\theta_i)), \begin{pmatrix} z_2(\theta_i) \\ -z_1(\theta_i) \end{pmatrix} \right\rangle = -\pi\cos\theta_i,$$

то условие 3) леммы 2.6 также выполнено.

Лемма доказана.

В следующем пункте главы лемма 2.6 используется для анализа более общего нелинейного случая.

Доказательство леммы 2.5. Если u – решение уравнения (2.39), то $v = (u, \dot{u})$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= -v_1 - v_1^3 + \varepsilon\cos((1+\delta)t), \end{aligned} \tag{2.45}$$

обратно, если v – решение системы (2.45), то v_1 – решение уравнения (2.39). Без ограничения общности можно считать, что $\dot{u}_\delta(0) = 0$, тогда $u_\delta(0) \neq 0$. Заменой переменных

$$x(t) = \frac{v(t)}{u_\delta(0)}$$

перейдем от системы (2.45) к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (u_\delta(0))^2 x_1^3 + \varepsilon\frac{1}{u_\delta(0)}\cos((1+\delta)t). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Таким образом, для доказательства леммы 2.5 достаточно установить, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $\delta \in (0, \delta_0]$ условия теоремы 2.5, связанные с оператором Φ^s системы (2.46), выполнены с $\widetilde{x}(t) = \dfrac{v_\delta(t)}{u_\delta(0)}$ и $T = 2\pi/(1+\delta)$. Для этого, в свою очередь, достаточно установить аналогичное утверждение для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (u_\delta(0))^2 x_1^3 + \varepsilon\cos((1+\delta)t). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Так как период периодических решений порождающей системы (2.45) изменяется монотонно от 2π до 0, когда начальное условие решения изменяется от $(0,0)$ до $(+\infty,0)$ (см. [10], пример с. 250), то $u_\delta(0)\to 0$, когда $\delta\to 0$. Но для $\delta=0$ справедливость желаемого для системы (2.47) утверждения следует из леммы 2.7, следовательно, это утверждение остается справедливым и при малых $\delta>0$.

Лемма доказана.

2.4 Симметричные и вырожденные двумерные случаи

В этом пункте будут рассмотрены два случая, в которых условия теорем 2.5 и 2.6 упрощаются.

2.4.1 Случай, когда рассматриваемая система удовлетворяет условиям симметрии

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon\sin(wt)g(x), \tag{2.48}$$

где при каждом $\xi\in\mathbb{R}^2$ имеют место соотношения

$$f_1(\xi) = f_1(-\xi_1,\xi_2), \tag{2.49}$$

$$f_2(\xi) = -f_2(-\xi_1,\xi_2), \tag{2.50}$$

$$f_1(\xi) = -f_1(\xi_1,-\xi_2), \tag{2.51}$$

$$f_2(\xi) = f_2(\xi_1,-\xi_2), \tag{2.52}$$

$$(f_1)'_{(1)}(\xi) = -(f_2)'_{(2)}(\xi), \tag{2.53}$$

$$g(\xi)=\begin{pmatrix}-g_1(\xi_1,-\xi_2)\\ g_2(\xi_1,-\xi_2)\end{pmatrix}, \tag{2.54}$$

$$g(\xi)=\begin{pmatrix}-g_1(-\xi_1,\xi_2)\\ g_2(-\xi_1,\xi_2)\end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Будем считать, что $\widetilde{x}$ – периодический цикл порождающей системы (2.26) наименьшего периода $2\pi/w$, удовлетворяющий условиям (2.32), (C) (см. подпункт 2.2.3), и

$$\widetilde{x}_1(0) = 0, \quad \widetilde{x}_2(0) \neq 0. \tag{2.56}$$

Обозначим через $U \subset \mathbb{R}^2$ внутренность цикла $\widetilde{x}$. Пусть $\widehat{y}$ – решение линеаризованной системы (2.30), удовлетворяющее начальному условию

$$\widehat{y}(0) = \left(0, 1/\dot{\widetilde{x}}_1(0)\right). \tag{2.57}$$

Предположим далее, что

$$\partial U \cap ((0, +\infty) \times 0) \neq 0, \tag{2.58}$$

$$f_1(\xi) > 0,\ f_2(\xi) < 0, \qquad \xi \in \partial U \cap ((0, +\infty) \times (0, +\infty)), \tag{2.59}$$

$$g_1(\xi) > 0 \text{ и } g_2(\xi) > 0, \qquad \xi \in \partial U \cap ((0, +\infty) \times (0, +\infty)). \tag{2.60}$$

Введем $\widetilde{\xi},\ \widehat{\xi} \in \mathbb{R}^2$ как

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi} &= 4 \int\limits_0^{\pi/(2w)} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \begin{pmatrix} \cos(w\tau) \\ \sin(w\tau) \end{pmatrix} d\tau, \\
\widehat{\xi} &= \int\limits_0^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\tau) \\ -\widehat{y}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \begin{pmatrix} \cos(w\tau) \\ \sin(w\tau) \end{pmatrix} d\tau.
\end{aligned}$$

Теорема 2.6 позволяет доказать следующее достаточное условие существования T-периодических решений в системе (2.48).

Теорема 2.7 *Пусть $\widetilde{x}$ – периодический цикл порождающей системы (2.26) наименьшего периода $2\pi/w$, удовлетворяющий условиям (A_1), (C), (2.32) и (2.56). Пусть выполнены условия (2.49)-(2.55), (2.58)-(2.60). Тогда, если*

$$\left|\widehat{\xi}_1\right| + \frac{|\widehat{y}_1(2\pi/w)|}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \widetilde{\xi}_1 < \min\left\{ \left|\widehat{\xi}_2\right| - \frac{|\widehat{y}_1(2\pi/w)|}{4\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \widetilde{\xi}_2, \widetilde{\xi}_1 \right\}, \tag{2.61}$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (2.48) имеет по крайней мере два $2\pi/w$-периодических решения $\widetilde{x}_\varepsilon$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ таких, что $\widetilde{x}_\varepsilon(t) \in U$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t) \notin$

U для любого $t \in [0, 2\pi/w]$, и

$$\rho\left(\widetilde{x}_\varepsilon(t), \partial U\right) + \rho\left(\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t), \partial U\right) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

равномерно по $t \in [0, 2\pi/w]$. Прочие $2\pi/w$-периодические решения x системы (2.48) удовлетворяют условию $x(t) \notin \partial U$ для любых $t \in [0, 2\pi/w]$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.8 *Рассмотрим линейную систему*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.62)$$

Предположим, что $a(-t) = -a(t)$, $b(-t) = b(t)$, $d(-t) = d(t)$ для любых $t \in [c_1, c_2]$. Тогда, если y – некоторое решение системы (2.62), то функция $z(t) = (y_2(-t), y_1(-t))$ удовлетворяет на отрезке $[c_1, c_2]$ сопряженной к (2.62) системе.

Справедливость леммы 2.8 проверяется непосредственной подстановкой решения $z(t) = (y_2(-t), y_1(-t))$ в сопряженную к (2.62) систему.

Доказательство теоремы 2.7. Пользуясь условиями (2.49) и (2.50), легко проверить, что функция $p(t) = (-\widetilde{x}_1(-t), \widetilde{x}_2(-t))$ является решением системы (2.26). Но из (2.56) имеем $p(0) = \widetilde{x}(0)$, следовательно,

$$(-\widetilde{x}_1(-t), \widetilde{x}_2(-t)) = \widetilde{x}(t) \text{ для любого } t \in \mathbb{R}. \qquad (2.63)$$

Линеаризуя систему (2.48) при $\varepsilon = 0$ на цикле $\widetilde{x}$, имеем систему

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}(t)) & (f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}(t)) \\ (f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}(t)) & (f_2)'_{(2)}(\widetilde{x}(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.64)$$

Из условия (2.53) следует, что

$$(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}(t)) = -(f_2)'_{(2)}(\widetilde{x}(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (2.65)$$

Из (2.49) имеем $-(f_1)'_{(1)}(-\xi_1, \xi_2) = (f_1)'_{(1)}(\xi_1, \xi_2)$, $\in\in \mathbb{R}^2$, и, учитывая (2.63), получаем

$$(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}(t)) = -(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}(-t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.66}$$

Из (2.50) имеем $(f_2)'_{(1)}(\xi_1, \xi_2) = (f_2)'_{(1)}(-\xi_1, \xi_2)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, и, учитывая (2.63), получаем

$$(f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}(-t)) = (f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.67}$$

Наконец, из (2.49) имеем $(f_1)'_{(2)}(-\xi_1, \xi_2) = (f_1)'_{(2)}(\xi_1, \xi_2)$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, и, учитывая (2.63), получаем

$$(f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}(t)) = (f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}(-t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.68}$$

Таким образом, выполнены условия леммы 2.8, на основании которой, учитывая также (2.32) и (2.57), заключаем, что функции

$$\widehat{z}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(-t) \\ \widehat{y}_1(-t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{z}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_2(-t) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(-t) \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

удовлетворяют сопряженной к (2.64) системе и, вместе с тем, условию (2.35). Из (2.63) для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\dot{\widetilde{x}}_1(-t) = \dot{\widetilde{x}}_1(t), \quad -\dot{\widetilde{x}}_2(-t) = \dot{\widetilde{x}}_2(t).$$

Покажем, что вместе с $\widehat{y}$ решением системы (2.64) является функция $p(t) = (-\widehat{y}_1(-t), \widehat{y}_2(-t))$. Действительно, из (2.66) и (2.68) имеем

$$\dot{p}_1(t) = -(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}(t))y_1(-t) + (f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}(t))y_2(-t),$$

и из (2.67), (2.65) и (2.66) заключаем

$$\dot{p}_2(t) = -(f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}(t))y_1(-t) + (f_2)'_{(2)}(\widetilde{x}(t))y_2(-t).$$

Но из (2.57) следует, что $p(0) = \widehat{y}(0)$, поэтому

$$(-\widehat{y}_1(-t), \widehat{y}_2(-t)) = \widehat{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.70}$$

Таким образом, функции $\widehat{z}$ и $\widetilde{z}$ можно переписать в виде

$$\widehat{z}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(t) \\ -\widehat{y}_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{z}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(t) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(t) \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

Введем в рассмотрение вспомогательное векторное поле $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определив его на ∂U как

$$F\left(\widetilde{x}(\theta)\right) = \operatorname{sign}\left(\widehat{\xi_2}\right) \cos(w\theta) \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\theta) \\ -\widehat{y}_1(\theta) \end{pmatrix} - \sin(w\theta) \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\theta) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\theta) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, поле F невырожденно на ∂U, покажем, что для него выполнены условия леммы 2.6 с направляющей функцией $z(t) := \dot{\widetilde{x}}(t)$. Во-первых, заметим, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_1(\theta) \\ \dot{\widetilde{x}}_2(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\theta) \\ -\widehat{y}_1(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle = \det \left\| \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_1(\theta) & \widehat{y}_1(\theta) \\ \dot{\widetilde{x}}_2(\theta) & \widehat{y}_2(\theta) \end{pmatrix} \right\|. \tag{2.72}$$

Поэтому функция $\langle F(\widetilde{x}(\cdot)), z(\cdot)\rangle$ из условия 2 леммы 2.6 имеет вид

$$\left\langle F(\widetilde{x}(\theta)), \dot{\widetilde{x}}(\theta) \right\rangle = \operatorname{sign}\left(\widehat{\xi_2}\right) \cos(w\theta) \det \left\| \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_1(\theta) & \widehat{y}_1(\theta) \\ \dot{\widetilde{x}}_2(\theta) & \widehat{y}_2(\theta) \end{pmatrix} \right\|,$$

пользуясь которым легко установить, что эта функция допускает ровно два нуля $\theta_1 = \pi/(2w)$ и $\theta_2 = 3\pi/w$ на интервале $[0, 2\pi/w)$ и строго монотонна в указанных точках. В тоже время

$$\left\langle F(\widetilde{x}(\theta_i)), \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_2(\theta_i) \\ -\dot{\widetilde{x}}_1(\theta_i) \end{pmatrix} \right\rangle = \sin(w\theta_i) \left\| \dot{\widetilde{x}}(\theta_i) \right\|$$

и, значит,

$$\operatorname{sign} \left\langle F(\widetilde{x}(\pi/(2w))), \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_2(\pi/(2w)) \\ -\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/(2w)) \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= -\operatorname{sign} \left\langle F(\widetilde{x}(3\pi/w)), \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_2(3\pi/w) \\ -\dot{\widetilde{x}}_1(3\pi/w) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Таким образом, все условия леммы 2.6 удовлетворены и, следовательно, $d_{\mathbb{R}^2}(F, U) \in \{0, 2\}$.

Условие (C) и лемма 2.4 позволяют утверждать, что для обобщенного оператора усреднения Φ^s, соответствующего системе (2.48), справедлива формула (2.38). Покажем, что условия теоремы гарантируют

$$\langle \Phi^s(\widetilde{x}(\theta)), F(\widetilde{x}(\theta))\rangle \neq 0, \quad s,\theta \in [0, 2\pi/w]. \tag{2.73}$$

Из (2.72) следует,что

$$\left\langle \dot{\widetilde{x}}(\theta), \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\theta) \\ -\widehat{y}_1(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi/w],$$

откуда имеем также

$$\left\langle \widehat{y}(\theta), \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\theta) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi/w].$$

Поэтому, используя формулу (2.38), можем записать

$$\langle \Phi^s(\widetilde{x}(\theta)), F(\widetilde{x}(\theta))\rangle =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\tau) \\ -\widehat{y}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \sin(w\tau - w\theta) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \int\limits_{s+\theta}^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \sin(w\tau - w\theta) d\tau \right) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sign}\left(\widehat{\xi_2}\right) \cos(w\tau) -$$

$$- \left(\int\limits_0^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \sin(w\tau - w\theta) d\tau \right) \cdot$$

$$\cdot \sin(w\tau).$$

Покажем, что

$$\int\limits_0^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \begin{pmatrix} \cos(w\tau) \\ \sin(w\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.74}$$

Из (2.55) и (2.63) для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{gathered}\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w - t) = \dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w + t),\\ g_1\left(\widetilde{x}(\pi/w - t)\right) = -g_1\left(\widetilde{x}(\pi/w + t)\right),\\ \dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w - t) = -\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w + t),\\ g_2\left(\widetilde{x}(\pi/w - t)\right) = g_2\left(\widetilde{x}(\pi/w + t)\right).\end{gathered} \tag{2.75}$$

В тоже время, $\cos(\pi - wt) = \cos(\pi + wt)$ и $\sin(\pi - wt) = -\sin(\pi + wt)$, поэтому при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w - t)\sin(\pi - wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w - t)) =\\ &\qquad = -\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w + t)\sin(\pi + wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w + t)),\\ &\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w - t)\sin(\pi - wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w - t)) =\\ &\qquad = -\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w + t)\sin(\pi + wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w + t)),\end{aligned} \tag{2.76}$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi/w} \dot{\widetilde{x}}_2(\tau)\sin(w\tau)g_1(\widetilde{x}(\tau))d\tau = \int\limits_0^{2\pi/w} \dot{\widetilde{x}}_1(\tau)\sin(w\tau)g_2(\widetilde{x}(\tau))d\tau = 0. \tag{2.77}$$

Аналогично при всех $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w - t)\cos(\pi - wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w - t)) =\\ &\qquad = \dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w + t)\cos(\pi + wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w + t)),\\ &\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w - t)\cos(\pi - wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w - t)) =\\ &\qquad = \dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w + t)\cos(\pi + wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w + t)),\end{aligned} \tag{2.78}$$

и

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \cos(w\tau)d\tau =\\ &= 2\int\limits_0^{\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \cos(w\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{2.79}$$

Далее, по условию (2.58) теоремы существует $t_* > 0$ такое, что $\widetilde{x}_2(t_*) = 0$, без ограничения общности можно считать, что

$$\widetilde{x}_2(t) \neq 0 \text{ при всех } t \in [0, t_*). \tag{2.80}$$

Из (2.63) следует, что $t_* \in [0, \pi/w]$. Пользуясь (2.51) и (2.52), легко установить, что системе (2.26) удовлетворяет функция $p(t) = (\widetilde{x}_1(t_* - t), -\widetilde{x}_2(t_* - t))$. В тоже время, в силу автономности системе (2.26) удовлетворяет также и функция $q(t) = (\widetilde{x}_1(t_* + t), \widetilde{x}_2(t_* + t))$. Но $p(0) = q(0)$, значит

$$(\widetilde{x}_1(t_* - t), -\widetilde{x}_2(t_* - t)) = (\widetilde{x}_1(t_* + t), \widetilde{x}_2(t_* + t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.81}$$

и, в частности, $(0, -\widetilde{x}_2(0)) = (\widetilde{x}_1(2t_*), \widetilde{x}_2(2t_*))$. Из $0 = \widetilde{x}_1(2t_*)$, на основании (2.63), следует, что число $4t_*$ является периодом $\widetilde{x}$. С другой стороны, из $-\widetilde{x}_2(0) = \widetilde{x}_2(2t_*)$ имеем, что $t_* \neq \pi/w$ и, следовательно, $4t_* \in [0, 4\pi/w)$. Но на интервале $[0, 4\pi/w)$ есть только одно число $2\pi/w$, являющееся периодом $\widetilde{x}$, поэтому $4t_* = 2\pi/w$ и $t_* = \pi/(2w)$. Таким образом, для любого $t \in [0, \mathbb{R}]$ равенство (2.81) можно переписать следующим образом

$$\left(\widetilde{x}_1\left(\frac{\pi}{2w} - t\right), -\widetilde{x}_2\left(\frac{\pi}{2w} - t\right)\right) = \left(\widetilde{x}_1\left(\frac{\pi}{2w} + t\right), \widetilde{x}_2\left(\frac{\pi}{2w} + t\right)\right),$$

откуда, учитывая (2.54), для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{gathered}
\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/(2w) - t) = -\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/(2w) + t), \\
g_1\left(\widetilde{x}(\pi/(2w) - t)\right) = -g_1\left(\widetilde{x}(\pi/(2w) + t)\right), \\
\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/(2w) - t) = \dot{\widetilde{x}}_2(\pi/(2w) + t), \\
g_2\left(\widetilde{x}(\pi/(2w) - t)\right) = g_2\left(\widetilde{x}(\pi/(2w) + t)\right).
\end{gathered} \tag{2.82}$$

Пользуясь полученными соотношениями и учитывая, что $\sin(\pi/2 - wt) = \sin(\pi/2 + wt)$, при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w - t)\sin(\pi/2 - wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w - t)) = \\
&\qquad = -\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w + t)\sin(\pi/2 + wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w + t)), \\
&\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w - t)\sin(\pi/2 - wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w - t)) = \\
&\qquad = -\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w + t)\sin(\pi/2 + wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w + t)).
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Аналогично, учитывая, что $\cos(\pi/2 - wt) = -\cos(\pi/2 + wt)$, при всех $t \in \mathbb{R}$

имеем

$$\begin{aligned}
&\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w-t)\cos(\pi/2-wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w-t))=\\
&\qquad=\dot{\widetilde{x}}_2(\pi/w+t)\cos(\pi/2+wt)g_1(\widetilde{x}(\pi/w+t)),\\
&\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w-t)\cos(\pi/2-wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w-t))=\\
&\qquad=\dot{\widetilde{x}}_1(\pi/w+t)\cos(\pi/2+wt)g_2(\widetilde{x}(\pi/w+t)).
\end{aligned}\tag{2.84}$$

Из (2.84) следует, что

$$\int\limits_0^{\pi/w}\left\langle\begin{pmatrix}-\dot{\widetilde{x}}_2(\tau)\\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau)\end{pmatrix},g(\widetilde{x}(\tau))\right\rangle\cos(w\tau)d\tau=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/(2w)}\left\langle\begin{pmatrix}-\dot{\widetilde{x}}_2(\tau)\\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau)\end{pmatrix},g(\widetilde{x}(\tau))\right\rangle\cos(w\tau)d\tau.\tag{2.85}$$

Равенства (2.77), (2.79) и (2.85) означают, что соотношение (2.74) выполнено и, вводя $\mathcal{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ как

$$\mathcal{F}(t)=\int\limits_t^{2\pi/w}\left\langle\begin{pmatrix}-\dot{\widetilde{x}}_2(\tau)\\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau)\end{pmatrix},g(\widetilde{x}(\tau))\right\rangle\begin{pmatrix}\cos(w\tau)\\ \sin(w\tau)\end{pmatrix}d\tau,\tag{2.86}$$

можем переписать $\langle\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)),F(\widetilde{x}(\theta))\rangle$ в виде

$$\langle\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)),F(\widetilde{x}(\theta))\rangle=$$

$$=\left(\left\langle\widehat{\xi},\begin{pmatrix}-\sin(w\theta)\\ \cos(w\theta)\end{pmatrix}\right\rangle+\frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\left\langle\mathcal{F}(s+\theta),\begin{pmatrix}-\sin(w\theta)\\ \cos(w\theta)\end{pmatrix}\right\rangle\right)\cdot$$

$$\cdot\mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right)\cos(w\theta)-$$

$$-\left\langle\begin{pmatrix}\widetilde{\xi}_1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sin(w\theta)\\ \cos(w\theta)\end{pmatrix}\right\rangle\sin(w\theta)=$$

$$=\left(\left(-\widehat{\xi}_1-\frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\mathcal{F}_1(s+\theta)\right)\sin(w\theta)\mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right)\cos(w\theta)+\right.$$

$$+\left(\widehat{\xi}_2\mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right)+\frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\mathcal{F}_2(s+\theta)\mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right)\right)\cos^2(w\theta)+$$

$$\left.+\widetilde{\xi}_1\sin^2(w\theta)\right).$$

Таким образом, для доказательства желаемого факта (2.73) достаточно установить, что

$$\min_{s,\theta\in[0,2\pi/w]}\left|\left(\left|\widehat{\xi}_2\right|+\frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\mathcal{F}_2(s+\theta)\mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right)\right)\cos^2(w\theta)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{\xi}_1\sin^2(w\theta)\right|>$$

$$>\max_{s,\theta\in[0,2\pi/w]}\left|\left(\widehat{\xi}_1+\frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\mathcal{F}_1(s+\theta)\right)\sin(w\theta)\cos(w\theta)\right|. \qquad (2.87)$$

Из условий (2.59) и (2.80) следует, что

$$\dot{\widetilde{x}}_1(t)>0 \text{ при } t\in[0,\pi/(2w)). \qquad (2.88)$$

Из последнего, в частности, следует, что функция $\widetilde{x}_1$ строго возрастает на интервале $[0,\pi/(2w))$, поэтому

$$\widetilde{x}_1(t)>0 \text{ при } t\in(0,\pi/(2w)]. \qquad (2.89)$$

Поскольку имеем (2.60), то оценки (2.80) и (2.89) влекут

$$g_1(\widetilde{x}(t))>0 \text{ и } g_2(\widetilde{x}(t))>0 \text{ при } t\in(0,\pi/(2w)). \qquad (2.90)$$

Наконец, из (2.59) и (2.89) имеем

$$\dot{\widetilde{x}}_2(t)<0 \text{ при } t\in(0,\pi/(2w)]. \qquad (2.91)$$

Оценки (2.90) и (2.91) позволяют заключить, что

$$\widetilde{\xi}_1>0. \qquad (2.92)$$

В силу соотношений (2.76), и учитывая $2\pi/w$-периодичность подынтегральных функций в (2.86), получаем

$$\max_{t\in[0,4\pi/w]}\left|\mathcal{F}_2(t)\right|=\max_{t\in[2\pi/w,3\pi/w]}\left|\mathcal{F}_2(t)\right|.$$

На основании соотношений (2.83)

$$\max_{t\in[2\pi/w,3\pi/w]}\left|\mathcal{F}_2(t)\right|=\max_{t\in[4\pi/(2w),5\pi/(2w)]}\left|\mathcal{F}_2(t)\right|.$$

Но из (2.88), (2.90) и (2.91) следует, что функции $\tau \to -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau)\sin(w\tau)g_1(\widetilde{x}(\tau))$ и $\tau \to \dot{\widetilde{x}}_1(\tau)\sin(w\tau)g_2(\widetilde{x}(\tau))$ неотрицательны на $[0, \pi/(2w)]$. Поэтому

$$\max_{t\in[0,4\pi/w]} |\mathcal{F}_2(t)| = |\mathcal{F}_2(5\pi/(2w))| =$$

$$= \int\limits_{4\pi/(2w)}^{5\pi/(2w)} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \sin(w\tau)d\tau$$

и, суммируя (2.76) и (2.83), получаем

$$\max_{t\in[0,4\pi/w]} |\mathcal{F}_2(t)| = \widetilde{\xi}_2/4. \tag{2.93}$$

Из условия (2.61) теоремы и (2.93) следует, что

$$\left|\widehat{\xi}_2\right| > \max_{s,\theta\in[0,2\pi/w]} \left| \frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \mathcal{F}_2(s+\theta) \right|.$$

Поэтому имеем

$$\min_{s,\theta\in[0,2\pi/w]} \left| \left(\left|\widehat{\xi}_2\right| - \frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \mathcal{F}_2(s+\theta) \mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right) \right) \cos^2(w\theta) + \right.$$

$$\left. + \widetilde{\xi}_1 \sin^2(w\theta) \right| \geq$$

$$\geq \min \left\{ \min_{s,\theta\in[0,2\pi/w]} \left(\left|\widehat{\xi}_2\right| + \frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \mathcal{F}_2(s+\theta) \mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right) \right), \widetilde{\xi}_1 \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\cos^2(w\theta) + \sin^2(w\theta)\right) \geq$$

$$\geq \min \left\{ \min_{s,\theta\in[0,2\pi/w]} \left(\left|\widehat{\xi}_2\right| - \frac{|\widehat{y}_1(2\pi/w)|}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} |\mathcal{F}_2(s+\theta)| \right), \widetilde{\xi}_1 \right\} =$$

$$= \min \left\{ \left|\widehat{\xi}_2\right| - \frac{|\widehat{y}_1(2\pi/w)|}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \max_{s,\theta\in[0,2\pi/w]} |\mathcal{F}_2(s+\theta)|, \widetilde{\xi}_1 \right\}$$

Подставляя (2.93) в полученное неравенство и используя условие (2.61), имеем

$$\min_{s,\theta\in[0,2\pi/w]} \left| \left(\left|\widehat{\xi}_2\right| + \frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \mathcal{F}_2(s+\theta) \mathrm{sign}\left(\widehat{\xi}_2\right) \right) \cos^2(w\theta) + \right.$$

$$\left. + \widetilde{\xi}_1 \sin^2(w\theta) \right| > \left|\widehat{\xi}_1\right| + \frac{|\widehat{y}_1(2\pi/w)|}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)} \widetilde{\xi}_1.$$

Таким образом, для завершения доказательства неравенства (2.87) остается показать, что

$$\max_{s,\theta\in[0,2\pi/w]}\left|\left(\widehat{\xi}_1+\frac{\widehat{y}_1(2\pi/w)}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\mathcal{F}_1(s+\theta)\right)\sin(w\theta)\cos(w\theta)\right|\leq$$

$$\leq\left|\widehat{\xi}_1\right|+\frac{|\widehat{y}_1(2\pi/w)|}{\dot{\widetilde{x}}_1(0)}\widetilde{\xi}_1,$$

для чего, в свою очередь, достаточно установить, что

$$\max_{s,\theta\in[0,2\pi/w]}|\mathcal{F}_1(s+\theta)|=2\widetilde{\xi}_1. \tag{2.94}$$

Действительно, оценки (2.88), (2.90) и (2.91) влекут

$$\left\langle\begin{pmatrix}-\dot{\widetilde{x}}_2(\tau)\\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau)\end{pmatrix},g(\widetilde{x}(\tau))\right\rangle\cos(w\tau)d\tau\geq 0,\quad \tau\in[0,\pi/(2w)]. \tag{2.95}$$

Далее, на основании неравенств (2.84) множество значений τ, при которых неравенство (2.95) верно, можем расширить с $[0,\pi/(2w)]$ до $[0,\pi/w]$ и затем, на основании неравенств (2.78) с $[0,\pi/w]$ до $[0,2\pi/w]$. Наконец, в силу $2\pi/w$-периодичности по τ левой части неравенства (2.95) заключаем, что оно верно при всех $\tau\in\mathbb{R}$. Полученное свойство означает, что

$$\max_{s,\theta\in[0,2\pi/w]}|\mathcal{F}_1(s+\theta)|=2\mathcal{F}_1(0),$$

то есть имеем (2.94) и, следовательно, справедливость неравенства (2.87) установлена. Как отмечалось ранее, справедливость этого неравенства означает, что выполнено (2.73). Поэтому при любом $s\in[0,2\pi/w]$ оператор Φ^s невырожден на ∂U, и

$$d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^s,U)=d_{\mathbb{R}^2}(\Phi^s,U)=d_{\mathbb{R}^2}(F,U)\in\{0,2\}.$$

Таким образом выполнены все условия теоремы 2.5, применяя которую получаем утверждение доказываемой теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 2.1 *В условиях теоремы 2.7 число* $\widetilde{\xi}_1$ *положительно (см. формулу 2.92 доказательства).*

Замечание 2.2 *В условиях теоремы 2.7 функция* $\widetilde{f}(\cdot, 0)$ *имеет вид*

$$\widetilde{f}(\theta, 0) = \int\limits_0^T \left\| \left(\dot{\widetilde{x}}(\tau), \sin(w(\tau-\theta)) g(\widetilde{x}(\tau)) \right) \right\| d\tau, \quad \theta \in [0, T]$$

(см. формулу 2.71 доказательства), то есть совпадает с субгармонической порядка $1/1$ *функцией Мельникова* $M^{1/1}$ *системы (2.1) (см. [31], формула для* $A_0(v)$*, с. 42 или Дж. Гукенхеймер и Ф. Холмс [10], формула 4.6.2). В частности,* $M^{1/1}$ *имеет ровно два простых нуля на интервале* $[0, 2\pi/w)$.

Для того, чтобы заметить, что в условиях теоремы 2.7 функция $M^{1/1}$ имеет ровно два простых нуля на $[0, 2\pi/w)$, достаточно обратиться к формуле (2.74) доказательства этой теоремы, из которой следует, что $M^{1/1}(\theta) = -\widetilde{\xi}_1 \sin(w\theta)$.

Пример 2.2 Для иллюстрации работы теоремы 2.7 рассмотрим следующую модифицированную систему Гринспана-Холмса (см. [53])

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(1-\delta(x_1^2+x_2^2)) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(1-\delta(x_1^2+x_2^2)) + \varepsilon \sin((1-\delta)t), \end{aligned} \tag{2.96}$$

на примере которой выяснение смысла условий (2.61) представляется наиболее наглядным.

Легко проверить, что при $\delta \in (0,1)$ система (2.96) удовлетворяет условиям (2.49)-(2.55), (2.58)-(2.60), и порождающая система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(1-\delta(x_1^2+x_2^2)), \\ \dot{x}_2 &= -x_1(1-\delta(x_1^2+x_2^2)) \end{aligned} \tag{2.97}$$

допускает семейство циклов

$$x(t) = \begin{pmatrix} \alpha \sin((1-\delta\alpha^2)t) \\ \alpha \cos((1-\delta\alpha^2)t) \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Рассмотрим задачу о возмущении цикла

$$\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin((1-\delta)t) \\ \cos((1-\delta)t) \end{pmatrix} \tag{2.98}$$

периода $2\pi/(1-\delta)$, совпадающего с периодом возмущения. Легко проверить, что цикл $\widetilde{x}$ удовлетворяет условиям (A_1), (C), (2.32) и (2.56). Линеаризованная на $\widetilde{x}$ система (2.97) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\delta\sin((1-\delta)t)\cos((1-\delta)t) & 1-\delta-2\delta\cos^2((1-\delta)t) \\ -1+\delta+2\delta\sin^2((1-\delta)t) & 2\delta\sin((1-\delta)t)\cos((1-\delta)t) \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

и кроме $2\pi/(1-\delta)$-периодического решения

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = (1-\delta)\begin{pmatrix} \cos((1-\delta)t) \\ -\sin((1-\delta)t) \end{pmatrix},$$

удовлетворяющего начальному условию $\dot{\widetilde{x}}(0) = (1-\delta, 0)$, допускает следующее решение

$$\widehat{y}(t) = \frac{1}{1-\delta}\begin{pmatrix} -2\delta t\cos((1-\delta)t) + \sin((1-\delta)t) \\ 2\delta t\sin((1-\delta)t) + \cos((1-\delta)t) \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее начальному условию $\widehat{y}(0) = (0, 1/(1-\delta))$. После некоторых преобразований для $\widetilde{\xi}$ и $\widehat{\xi}$ получаем следующие выражения

$$\widetilde{\xi} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\xi} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\delta\pi^2}{(1-\delta)^3} \\ -\dfrac{\pi}{(1-\delta)^3} \end{pmatrix},$$

на основании которых условие (2.61) теоремы 2.7 для системы (2.96) записывается в виде

$$\frac{2\delta\pi^2}{(1-\delta)^3} + \frac{16\delta\pi^2}{3(1-\delta)^2} < \min\left\{\frac{\pi}{(1-\delta)^3} - \frac{4\delta\pi}{3(1-\delta)^3}, \frac{4}{3}\right\}.$$

Нетрудно заключить, что последнему неравенству удовлетворяют все $\delta > 0$, при которых

$$2(1-\delta)^3 - (3\pi^2 + 8\pi)\delta > 0. \tag{2.99}$$

Точное решение неравенства (2.99) может быть получено при помощи известных формул Кардано для корней многочленов третьей степени (см. [34], Гл. III, § 3.2). В настоящей диссертации мы ограничимся заключением о том, что неравенству (2.99) удовлетворяет отрезок $[0, 1/40]$, проверяемым непосредственной постановкой чисел $\delta = 0$ и $\delta = 1/40$ в данное неравенство. В любом случае, из неравенства (2.99) следует, что условие (2.61) теоремы 2.7 связано с ограничением на нелинейность порождающей системы (2.97).

Таким образом, теорема 2.7 позволяет получить для системы (2.96) следующее утверждение, более сильное, чем утверждение леммы 2.5 о $2\pi/(1-\delta)$-периодических решениях уравнения Дуффинга.

Предложение 2.1 *Пусть $\delta \in (0, 1/40]$. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что:*

1) при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ возмущенное уравнение (2.96) имеет по крайней мере два различных $\frac{2\pi}{1+\delta}$-периодических решения $\widetilde{x}_\varepsilon$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ таких, что значения функции $\widetilde{x}_\varepsilon$ лежат строго внутри единичного круга, а значения функции $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ лежат строго снаружи единичного круга;

2) всякое $\frac{2\pi}{1+\delta}$-периодическое решение x системы (2.96) с $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ таково, что $\|x(t)\| \neq 1$ при любом $t \in \left[0, \frac{2\pi}{1+\delta}\right]$;

3) решения $\widetilde{x}_\varepsilon$ и $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ удовлетворяют условиям
$\widetilde{x}_\varepsilon(t) \to \left(\sin\left((1-\delta)\left(t-\widetilde{\theta}\right)\right), \cos\left((1-\delta)\left(t-\widetilde{\theta}\right)\right)\right)$ *и*
$\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t) \to \left(\sin\left((1-\delta)\left(t-\widetilde{\widetilde{\theta}}\right)\right), \cos\left((1-\delta)\left(t-\widetilde{\widetilde{\theta}}\right)\right)\right)$ *при $\varepsilon \to 0$ для некоторых $\widetilde{\theta}, \widetilde{\widetilde{\theta}} \in \left[0, \frac{2\pi}{1+\delta}\right]$.*

2.4.2 Случай, когда порождающий цикл является вырожденным

В этом подпункте предполагается, что $\{x(\cdot,\alpha)\}_{\alpha>0}$ – семейство циклов порождающей системы (2.26) таких, что

$$x(0,\alpha)=(0,\alpha), \tag{2.100}$$

и векторы $x(0,\alpha)$ и $x'_{(1)}(0,\alpha)(0)$ линейно-независимы для всех $\alpha>0$, то есть

$$x(0,\alpha)\nparallel x'_{(1)}(0,\alpha)(0), \quad \alpha>0. \tag{2.101}$$

Через $T(\alpha)$ обозначается наименьший период цикла $x(\cdot,\alpha)$.

Определение 2.2 *Цикл $x(\cdot,\alpha_0)$ семейства $\{x(\cdot,\alpha)\}_{\alpha>0}$, удовлетворяющий условиям (2.100)-(2.101), будем называть вырожденным, если*

$$T'(\alpha_0)=0.$$

Следующий пример показывает, что если цикл $x(\cdot,\alpha_0)$ является вырожденным, то применение теоремы 2.5 значительно упрощается. Затем это наблюдение обосновывается, и соответствующие упрощения теорем 2.5 и 2.6 формулируются для общего вырожденного случая.

Пример 2.3 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\left(\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1\right)^2+1\right)\\ \dot{x}_2 &= -x_1\left(\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1\right)^2+1\right)+\\ &\quad+\varepsilon(\mu x_1^+ +\nu x_1^- +\cos((1+\delta)t)).\end{aligned} \tag{2.102}$$

Порождающая система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\left(\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1\right)^2+1\right)\\ \dot{x}_2 &= -x_1\left(\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1\right)^2+1\right)\end{aligned} \tag{2.103}$$

допускает семейство циклов

$$x(t,\alpha)=\alpha\begin{pmatrix}\sin\left(\left((\alpha-1)^2+1\right)t\right)\\ \cos\left(\left((\alpha-1)^2+1\right)t\right)\end{pmatrix}$$

периода

$$T(\alpha) = \frac{2\pi}{(\alpha-1)^2+1}.$$

Таким образом, имеем

$$T'(1) = 0$$

и, значит, цикл $\widetilde{x}(t) = x(t,1) = (\sin t, \cos t)$ системы (2.103) является вырожденным. Оказывается, линеаризованная на цикле $\widetilde{x}$ система (2.103) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

и, значит, решение $\widehat{y}$, участвующее в формуле для обобщенного оператора усреднения Φ^s системы (2.102), дается формулой

$$\widehat{y}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что оператор Φ^s для системы (2.102) совпадает с оператором Φ^s для косинусоидально возмущенной линейной системы (2.44), рассмотренной в лемме 2.7. Получаем следующее утверждение

Предложение 2.2 *Пусть $|\mu - \nu| < 2$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что:*

1) при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (2.102) имеет по крайней мере два 2π-периодических решения $\widetilde{x}_\varepsilon$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ таких, что значения функции $\widetilde{x}_\varepsilon$ лежат строго внутри единичного круга с центром в нуле, а значения функции $\widetilde{\widetilde{x}}$ лежат строго снаружи этого круга;

2) всякое 2π-периодическое решение x системы (2.102) с $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ таково, что $\|x(t)\| \neq 1$ при любом $t \in [0, 2\pi]$;

3) решения $\widetilde{x}_\varepsilon$ и $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ удовлетворяют условиям
$\widetilde{x}_\varepsilon(t) \to \left(\sin\left(t - \widetilde{\theta}\right), \cos\left(t - \widetilde{\theta}\right)\right)$ *и*
$\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t) \to \left(\sin\left(t - \widetilde{\widetilde{\theta}}\right), \cos\left(t - \widetilde{\widetilde{\theta}}\right)\right)$ *при $\varepsilon \to 0$ для некоторых $\widetilde{\theta}, \widetilde{\widetilde{\theta}} \in [0, 2\pi]$.*

В общем же вырожденном случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.9 *Если цикл $x(\cdot,\alpha_0)$ является вырожденным, то каждое решение линеаризованной системы (2.30) с $\widetilde{x} := x(\cdot,\alpha_0)$ является $T(\alpha_0)$-периодическим.*

Доказательство. Так как правая часть порождающей системы (2.26) непрерывно дифференцируема, то (см., например, Л. С. Понтрягин [42], Гл. 4, § 24) функция $(t,\alpha) \to x(t,\alpha)$ непрерывно дифферен-цируема по совокупности переменных. В пределах данного доказательства через x'_t и x'_α обозначаются производные функции x по первой и второй переменным соответственно. Дифференцируя тождество

$$x'_t = f(x(t,\alpha))$$

по α, получаем

$$x''_{t\alpha} = f'(x(t,\alpha))x'_\alpha,$$

следовательно, $\widehat{y} = x'_\alpha(\cdot,\alpha_0)$ является решением линеаризованной системы (2.30) с $\widetilde{x} = x(\cdot,\alpha_0)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(T(\alpha_0)) - \widehat{y}(0) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(T(\alpha_0),\alpha_0+\Delta) - x(T(\alpha_0),\alpha_0)}{\Delta} - \\
&\quad - \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(0,\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0)}{\Delta} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(T(\alpha_0),\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0+\Delta)}{\Delta} + \\
&\quad + \frac{-x(T(\alpha_0),\alpha_0) + x(0,\alpha_0)}{\Delta} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(T(\alpha_0),\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0+\Delta)}{\Delta} = \\
&= \left(x(T(\cdot),\alpha_0)\right)'(\alpha_0) = x'_t(T(\alpha_0),\alpha_0)T'(\alpha_0) = 0,
\end{aligned}$$

то есть $\widehat{y}$ – $T(\alpha_0)$-периодическое решение системы (2.30). Но

$$\widehat{y}(0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(0,\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\widehat{y}$ и $x'_t(\cdot,\alpha_0)$ – два линейно-независимых $T(\alpha_0)$-периодических решений (двумерной) системы (2.30).

Лемма доказана.

Из леммы 2.9 следует, что если цикл $\widetilde{x} = x(\cdot,\alpha_0)$ является вырожденным, то формула (2.38) для оператора Φ^s принимает значительно более простой вид:

$$\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)) = \widehat{f}(\theta)\dot{\widetilde{x}}(\theta) + \widetilde{f}(\theta,0)\widehat{y}(\theta) \quad \text{для любых } s,\theta \in \mathbb{R}, \tag{2.104}$$

где

$$\widetilde{f}(\theta,0) = \int\limits_0^T \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau),0)\rangle\, d\tau,$$

$$\widehat{f}(\theta) = \int\limits_0^T \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau),0)\rangle\, d\tau.$$

Соответственно, получаем следующие следствия из теорем 2.6 и 2.7 для случая вырожденных циклов.

Следствие 2.1 *Пусть выполнены условия (A_1) и (C). Пусть T-периодический цикл $\widetilde{x} = x(\cdot,\alpha_0)$ является вырожденным. Предположим, что для каждого $\theta_0 \in [0,\widetilde{T}]$ такого, что $\widetilde{f}(\theta_0,0)=0$, имеем*

$$\widehat{f}(\theta_0) \neq 0.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ всякое T-периодическое решение x системы (2.27) таково, что $x(t) \notin \partial U$ при любом $t \in [0,T]$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ – внутренность цикла $\widetilde{x}$. Более того, если известно, что

$$d_{\mathbb{R}^2}(-\Phi^T, U) \neq 1,$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (2.27) имеет по крайней мере два T-периодических решения $\widetilde{x}_\varepsilon$ и $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ таких, что $\widetilde{x}_\varepsilon(t) \in U$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t) \notin U$ для любого $t \in [0,T]$, и

$$\rho\left(\widetilde{x}_\varepsilon(t), \partial U\right) + \rho\left(\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t), \partial U\right) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Напомним, что число $\widetilde{\xi}_1 \in \mathbb{R}$ и вектор $\widehat{\xi} \in \mathbb{R}^2$ в теореме 2.7 введены как

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}_1 &= 4 \int\limits_0^{\pi/(2w)} \left\langle \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\tau) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \cos(w\tau) d\tau, \\ \widehat{\xi} &= \int\limits_0^{2\pi/w} \left\langle \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\tau) \\ -\widehat{y}_1(\tau) \end{pmatrix}, g(\widetilde{x}(\tau)) \right\rangle \begin{pmatrix} \cos(w\tau) \\ \sin(w\tau) \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Следствие 2.2 *Пусть* $\widetilde{x} = x(\cdot, \alpha_0)$ *– вырожденный периодический цикл порождающей системы (2.26) наименьшего периода* $2\pi/w$, *удовлетворяющий условиям* (A_1), (C), *(2.32) и (2.56). Пусть выполнены условия симметрии (2.49)-(2.55), (2.58)-(2.60). Тогда, если*

$$\left|\widehat{\xi}_1\right| < \min\left\{\left|\widehat{\xi}_2\right|, \left|\widetilde{\xi}_1\right|\right\}, \tag{2.105}$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ *синусоидально возмущенная система (2.48) имеет по крайней мере два* $2\pi/w$*-периодических решения* $\widetilde{x}_\varepsilon$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon$ *таких, что* $\widetilde{x}_\varepsilon(t) \in U$, $\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t) \notin U$ *для любого* $t \in [0, 2\pi/w]$, *и*

$$\rho\left(\widetilde{x}_\varepsilon(t), \partial U\right) + \rho\left(\widetilde{\widetilde{x}}_\varepsilon(t), \partial U\right) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

равномерно по $t \in [0, 2\pi/w]$. *Прочие* $2\pi/w$*-периодические решения* x *системы (2.48) при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *удовлетворяют условию* $x(t) \notin \partial U$ *для любого* $t \in [0, 2\pi/w]$.

2.5 Сопоставление полученных результатов с имеющимися в литературе

В силу леммы 2.1 для обобщенного оператора сдвига Φ^s системы (2.1) справедливо соотношение

$$\eta(T, s, \xi) - \eta(0, s, \xi) = \int\limits_{s-T}^{s} \Omega'_\xi(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi)) g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi), 0) d\tau =$$

$$= \int\limits_{s-T}^{s} Y^{-1}(\tau,\xi) g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi),0)d\tau, \qquad (2.106)$$

где $Y(t,\xi)$ – нормированная ($Y(0,\xi) = I$) фундаментальная матрица системы $\dot{y} = f'_{(2)}(t,\Omega(t,0,\xi))y$. Из (2.106) следует, что при $f = 0$ оператор Φ^s имеет вид

$$\Phi^s(\xi) = \int\limits_0^T g(\tau,\xi,0)d\tau,$$

то есть не зависит от s и совпадает с классическим оператором усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского, см. [33], формула 7.112. Соответствующая теорема принципа усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского о T-периодических решениях системы (2.1) была впервые сформулирована в терминах теории топологической степени Ж. Мавеном в его диссертационной работе [64] (позже опубликована в [65]) и утверждает, что если $\int\limits_0^T g(\tau,\xi,0)d\tau \neq 0$ для всех $\xi \in \partial U$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор

$$(Q_\varepsilon x)(t) = x(T) + \varepsilon \int\limits_0^T g(\tau,\xi,\varepsilon)d\tau$$

не имеет неподвижных точек на ∂W_U, и $d(I - Q_\varepsilon, W_U) = d_{\mathbb{R}^n}\left(-\int\limits_0^T g(\tau,\cdot,0)d\tau, U\right)$. Таким образом, доказанная в настоящей главе теорема 2.1 является обобщением указанной теоремы Мавена.

В случае, когда порождающая система (2.2) имеет невырожденный цикл $\widetilde{x}$ периода T, теорема 2.6 дополняет классический метод В. К. Мельникова ([31], лемма 7), который утверждает, что *если так называемая функция Мельникова*

$$M^{1/1}(\theta) = \int\limits_0^T \left\| \left(\dot{\widetilde{x}}(\tau), g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau),0)\right) \right\| d\tau$$

имеет нуль $\theta_0 \in [0,T]$ такой, что $\left(M^{1/1}\right)'(\theta_0) \neq 0$, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система (2.1) допускает T-периодическое

решение x_ε, *удовлетворяющее условию*

$$x_\varepsilon(t) \to \widetilde{x}(t+\theta_0) \quad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, теорема 2.6 дает условия, при которых T-периодические решения Мельникова не пересекают порождающий цикл. Более того, траектории различных T-периодических решений Мельникова могут совпадать, в то время как теорема 2.6 гарантирует существование для системы (2.1) по крайней мере двух T-периодических решений с различными траекториями.

Сказанное позволило установить (лемма 2.5), что периодические решения возмущенного уравнения Дуффинга не пересекают порождающих циклов малой амплитуды. Такое свойство отсутствует в классических результатах о периодических решениях уравнения Дуффинга, полученных А. Д. Морозовым [35] и Б. Гринспаном-Ф. Холмсом [53]. Из доказательства леммы 2.5 следует, что ее утверждения справедливы также для уравнения

$$\ddot{u} + u + u^3 = \varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^- + \cos((1+\delta)t)),$$

где $|\mu - \nu| < 2$, к которому в силу недифференцируемости правой части метод Мельникова не применим. Также установлены аналогичные свойства T-периодических решений для системы Гринспана-Холмса (пример 2.2), что стало возможным благодаря предложенной для симметричного случая теореме 2.7. Отметим (см. замечание 2.2), что в случае симметричных систем, рассматриваемых в теореме 2.7, соответствующая функция Мельникова $M^{1/1}(\theta)$ имеет ровно два простых нуля на интервале $[0, T)$. Это означает, что в общих условиях теоремы 2.7 и указанной выше теоремы Мельникова, последняя теорема всегда гарантирует существование для системы (2.1) точно такого же количества периодических решений (двух) вблизи порождающего цикла $\widetilde{x}$, что и теорема 2.7, но теорема 2.7 дополнительно утверждает, что траектории полученных решений не пересекаются.

Наконец отметим, что в рассмотренном в пункте 2.4 случае вырожденного порождающего цикла метод Мельникова не работает, а имеющиеся его мо-

дификации требуют выполнения целого ряда дополнительных условий, см. К. Йагасаки ([72], теорема 3.5). Условия же предложенной теоремы 2.6, как продемонстрировано в примере 2.3, в вырожденном случае наоборот упрощаются, см. также соответствующие следствия 2.1 и 2.2 из теорем 2.6 и 2.7. Для изучения существования в возмущенной системе (2.27) периодических решений близких к вырожденным циклам порождающей системы может, вообще говоря, использоваться общая теорема Рума-Чиконе ([69], теорема 4.1), но она работает только в случае, когда возмущение зависит от фазовой переменной (см. [69], формула 2.7), что не требуется в указанных утверждениях пункта 2.4. Другие качественные результаты о поведении периодических решений возмущенных систем вблизи вырожденного порождающего цикла получены А. Д. Морозовым и Л. П. Шильниковым в [36].

Обсудим кратко публикации автора по результатам настоящей главы. Обобщенный оператор усреднения Φ^s предложен М. И. Каменским, О. Ю. Макаренковым и П. Нистри в [13]. Лемма 2.1 о виде оператора Φ^s доказана автором в [56], им же в [56] проведено доказательство обобщенной формулы Мавена (утверждение 1 теоремы 2.1), причем в несколько расширенной формулировке, чем данное в настоящей главе. Доказательство утверждения 1 теоремы 2.1 для частного класса систем (2.48), но дающее явное значение ε_0, сделано в [26]. Теорема 2.3, связанная с приложением обобщенной формулы Мавена к существованию периодических решений, предложенная автором, опубликована в [13]. Теорема 2.5 и формула (2.38) леммы 2.4, составляющие геометрический подход в решении задачи В. К. Мельникова, опубликованы в [63]. Доказательство утверждения 1) леммы 2.5 о существовании периодических решений в уравнении Дуффинга для случая несколько более общего уравнения сделано в [62].

Глава 3

Скорость сходимости полученных T-периодических решений при уменьшении амплитуды возмущения

Как отмечалось во введении, результаты о существовании T-периодических решений в T-периодических системах обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{3.1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, основанные на геометрических методах, используют всего лишь непрерывность функции g (от f может требоваться непрерывная дифференцируемость), см., например, [12], [15], [16], [18], [19], [32], [37]-[39], [45], [50]-[52], [55]-[59], [64]-[67], а также результаты глав 1 и 2.

В настоящей главе изучается задача, поставленная Дж. Хейлом и П. Тбоас в [54], о скорости сходимости и поведении T-периодических решений системы (3.1) при $\varepsilon \to 0$ для непрерывно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и непрерывной функции $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$.

Особенность исследования данной задачи состоит в том, что во многих случаях неизвестно, что порождающее T-периодическое решение $\widetilde{x}$ системы

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3.2}$$

удовлетворяет условиям невырожденности, то есть, что линеаризованная си-

стема

$$\dot{y} = f'_{(2)}(t, \widetilde{x}(t)) \tag{3.3}$$

не имеет мультипликаторов +1. Более того, как следует из [54], случай, когда +1 является мультипликатором системы (3.3) представляет особый интерес.

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – сходящаяся к нулю последовательность значений параметра системы (3.1) и $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – соответствующая последовательность T-периодических решений этой системы такая, что

$$x_k(t) \to \widetilde{x}(t) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{3.4}$$

где $\widetilde{x}$ – T-периодическое решение порождающей системы (3.2).

3.1 Одна альтернатива для общего случая

Следующая альтернатива утверждает, что либо начальные условия $x_k(0)$ сходятся к начальному условию $\widetilde{x}(0)$ порождающего решения $\widetilde{x}$ вдоль плоскости $\left\{l \in \mathbb{R}^n : \left(\Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(0)) - I\right) l = 0\right\}$, либо сходимость имеет скорость $\varepsilon_k > 0$. При этом, в последнем случае описание поведения решений x_k при $k \to \infty$ может быть уточнено на основании обобщенного оператора усреднения Φ^s, соответствующего задаче о T-периодических решениях для системы (3.1).

Теорема 3.1 *Пусть выполнено условие (3.4) и*

$$\frac{\widetilde{x}(0) - x_k(0)}{\|\widetilde{x}(0) - x_k(0)\|} \to l \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{3.5}$$

где $l \in \mathbb{R}^n$. Тогда либо

$$\left(\Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(0)) - I\right) l = 0, \tag{3.6}$$

либо существует константа $c > 0$ такая, что

$$\|\widetilde{x}(0) - x_k(0)\| \leq c\varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

В последнем случае для любой сходящейся последовательности $\left\{\dfrac{\widetilde{x}(0)-x_k(0)}{\varepsilon_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ *последовательность* $\left\{\dfrac{\widetilde{x}(0)-\Omega(0,t,x_k(t))}{\varepsilon_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ *также сходится, и справедливо соотношение*

$$(\Omega'_{(3)}(T,0,\widetilde{x}(0))-I)\lim_{k\to\infty}\frac{\widetilde{x}(0)-\Omega(0,t,x_k(t))}{\varepsilon_k}= \\ =\Phi^t(\widetilde{x}(0)),\quad t\in[0,T]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Положим

$$\nu_k(t)=\Omega(0,t,x_k(t)). \tag{3.9}$$

Тогда, в силу леммы 1.1

$$\nu_k(t)=\Omega(T,0,\nu_k(T))+\varepsilon_k\int\limits_0^t\Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau,\nu_k(\tau))d\tau, \tag{3.10}$$

где

$$\Upsilon_\varepsilon(t,\xi)=\Omega'_\xi(0,t,\Omega(t,0,\xi))g(t,\Omega(t,0,\xi),\varepsilon).$$

Заметим, что $\widetilde{x}(0)=\lim_{n\to\infty}\nu_k(0)=\lim_{n\to\infty}\nu_k(T)$ и из (3.10) при $k=\infty$ получаем $\widetilde{x}(0)=\Omega(T,0,\widetilde{x}(0))$. Перепишем (3.10) в следующем виде

$$\begin{aligned}-(\widetilde{x}(0)-\nu_k(t)) &= (\Omega(T,0,\nu_k(t))-\Omega(T,0,\widetilde{x}(0)))+\\ &+\Omega(T,0,\nu_k(T))-\Omega(T,0,\nu_k(t))+\\ &+\varepsilon_k\int\limits_0^t\Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau,\nu_k(\tau))d\tau\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}-(\widetilde{x}(0)-\nu_k(t)) &= -\Omega'_{(3)}(T,0,\widetilde{x}(0))\,(\widetilde{x}(0)-\nu_k(t))+o\,(\widetilde{x}(0)-\nu_k(t))\\ &+\Omega'_{(3)}(T,0,\nu_k(T))\,(\nu_k(T)-\nu_k(t))+\\ &+o\,(\nu_k(T)-\nu_k(t))+\varepsilon_k\int\limits_0^t\Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau,\nu_k(\tau))d\tau.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Существует две возможности: либо

$$\frac{\|\widetilde{x}(0)-x_k(0)\|}{\varepsilon_k}\to\infty\quad\text{при } k\to\infty, \tag{3.12}$$

либо существует $c > 0$ такое, что

$$\frac{\|\widetilde{x}(0) - x_k(0)\|}{\varepsilon_k} < c \quad \text{при } k \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

В случае (3.12) имеем

$$\frac{\varepsilon_k}{\|\widetilde{x}(0) - x_k(0)\|} \to 0 \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому, учитывая, что

$$\nu_k(T) - \nu_k(t) = \varepsilon_k \int\limits_t^T \Upsilon_{\varepsilon_k}(\tau, \nu_k(\tau))d\tau, \tag{3.14}$$

вправе перейти к пределу при $k \to \infty$ и $t = 0$ в (3.11), деленном на $\|\widetilde{x}(0) - x_k(0)\|$, и получить

$$\left(\Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(0)) - I\right) l = 0.$$

Таким образом, в случае (3.12) выполнено утверждение (3.6) теоремы 3.1, а в противном случае – утверждение (3.13). Значит альтернатива теоремы 3.1 справедлива.

Предположим теперь, что последовательность $\left\{\dfrac{\widetilde{x}(0) - x_k(0)}{\varepsilon_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится. Так как

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{x}(0) - \nu_k(t)}{\varepsilon_k} &= \frac{\widetilde{x}(0) - x_k(0) + \nu_k(0) - \nu_k(t)}{\varepsilon_k} = \\ &= \frac{\widetilde{x}(0) - x_k(0)}{\varepsilon_k} - \int\limits_0^t \Upsilon(\tau, \nu_k(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{3.15}$$

то последовательность $\left\{\dfrac{\widetilde{x}(0) - \Omega(0, t, x_k(t))}{\varepsilon_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ также сходится. Полагая $h(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\widetilde{x}(0) - \Omega(0, t, x_k(t))}{\varepsilon_k}$ и учитывая формулу (3.14), перейдем к пределу в (3.11), деленном на ε_k, в результате получим

$$-h(t) = -\Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(0))h(t) + \Omega'_{(3)}(T, 0, \widetilde{x}(0)) \int\limits_t^T \Upsilon(\tau, \widetilde{x}(0))d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \Upsilon(\tau, \widetilde{x}(0))d\tau,$$

что в силу леммы 2.1 означает (3.8).

Теорема доказана полностью.

В случае, когда порождающая система (3.2) автономна, для T-периодических решений возмущенной системы

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon) \tag{3.16}$$

получаем следующее следствие из теоремы 3.1.

Следствие 3.1 *Пусть выполнено условие (3.4) и цикл $\widetilde{x}$ является простым. Пусть выполнено условие (3.5) и l – вектор, о котором говорится в этом условии. Тогда, либо $l = \lambda\dot{\widetilde{x}}(0)$, где $\lambda \neq 0$, либо существует константа $c > 0$ такая, что*

$$\|\widetilde{x}(t) - x_k(t)\| \leq c\varepsilon_k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

В следующем пункте главы предлагается оценка для расстояния между траекториями решений x_k и $\widetilde{x}$, но при этом дополнительно предполагается, что цикл $\widetilde{x}$ простой.

3.2 Оценка скорости сходимости для случая, когда предельное T-периодическое решение является простым циклом

В настоящем пункте предполагается, что цикл $\widetilde{x}$ является простым. В сделанном предположении сопряженная система

$$\dot{z} = -(f'(\widetilde{x}(t)))^* z \tag{3.18}$$

допускает $n-1$ линейно-независимых не T-периодических решений $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$, причем указанные решения всегда могут быть выбраны так,

что (см. [29], формула 2.13)

$$\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), z_i(0) \right\rangle = 0, \qquad t \in \mathbb{R},\ i \in \overline{1, n-1}. \tag{3.19}$$

Пусть $Z_{n-1}(t)$ – $n \times n-1$-матрица задаваемая формулой $Z_{n-1}(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_{n-1}(t))$. Введем функцию $M^{\perp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ как

$$M^{\perp}(s) = \int\limits_{s-T}^{s} Z_{n-1}^*(\tau) g(\tau, \widetilde{x}(\tau), 0) d\tau.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.2 *Пусть выполнено условие (3.4). Тогда для любого* $\theta \in [0, T]$ *имеем*

$$Z_{n-1}^*(\theta) \left(x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \widetilde{x}(\theta) \right) = \varepsilon_k D M^{\perp}(\theta) + o(\varepsilon_k), \tag{3.20}$$

где D *– невырожденная* $(n-1) \times (n-1)$*-матрица и* $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *равномерно по отношению к* $\theta \in [0, T]$. *Более того,* $x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) \in I(\theta, B_1^{n-1}(0))$, $\theta \in [0, T]$, *где* $I(\theta, \cdot) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ *– гладкая поверхность, трансверсально пересекающая цикл* $\widetilde{x}$ *в точке* $\widetilde{x}(\theta)$.

Для доказательства теоремы 3.2 определим, во-первых, функцию $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)$, поверхность $I(\theta, \cdot)$ и установим некоторые их свойства.

Обозначим через $Y_{n-1}(t) = (y_1(t), ..., y_{n-1}(t))$ первые $n-1$ столбцов матрицы $\left((Z_{n-1}(t), \widetilde{z}(t))^{-1} \right)^*$, где $\widetilde{z}$ – T-периодическое решение системы (3.18), удовлетворяющее

$$\left\langle \dot{\widetilde{x}}(t), \widetilde{z}(t) \right\rangle = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Последний выбор возможен (см. [29], формула 2.13).

Лемма 3.1 *Предположим (3.19) и (3.21). Тогда*

1) $\left((Z_{n-1}(t), \widetilde{z}(t))^{-1} \right)^* = \left(Y_{n-1}(t), \dot{\widetilde{x}}(t) \right), \quad t \in \mathbb{R};$

2) любая функция из $\{y_1, ..., y_{n-1}\}$ *не* T*-периодична;*

3) $Z_{n-1}^*(t) = \widetilde{D} Z_{n-1}^*(t+T), \quad t \in \mathbb{R},$

где $\widetilde{D}$ *– постоянная* $(n-1) \times (n-1)$*-матрица, собственные значения которой отличны от* $+1$.

Доказательство. Так как $\left((Z_{n-1}(t),\widetilde{z}(t))^{-1}\right)^*$ – фундаментальная матрица T-периодической линейной системы $\dot{y}=f'(\widetilde{x}(t))y$ (см. [11], Гл. III, лемма § 12), то, пользуясь теорией Флоке, возможно записать следующую формулу (см. [11], Гл. III, §15)

$$\left((Z_{n-1}(t),\widetilde{z}(t))^{-1}\right)^* = \Phi(t)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{3.22}$$

где $\Phi(t)$ – T-периодическая $n\times n$ матрица Флоке, Λ – $(n-1)\times(n-1)$ невырожденная матрица и S – подходящая невырожденная $n\times n$-матрица. В силу (3.19) и (3.21) последний столбец матрицы $\left((Z_{n-1}(t),\widetilde{z}(t))^{-1}\right)^*$ – это $\dot{\widetilde{x}}(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Из этого утверждения следует, что S имеет вид $S=\left(S_{n-1},\begin{pmatrix} 0_{n-1\times 1} \\ s_0 \end{pmatrix}\right)$, где S_{n-1} – $n\times(n-1)$-матрица и $s_0\neq 0$. Из этого мы можем заключить, что матрица S_{n-1} не содержит линейно-зависимых с $\begin{pmatrix} 0_{n-1\times 1} \\ s_0 \end{pmatrix}$ столбцов. Следовательно, по крайней мере одна не n-я компонента любого столбца S_{n-1} является ненулевой, что, очевидно, завершает доказательство второго утверждения леммы.

Для доказательства третьего утверждения леммы заметим, что формула (3.22) позволяет утверждать, что

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\Lambda T} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S\left((Z_{n-1}(t+T),\widetilde{z}(t+T))^{-1}\right)^* =$$
$$= S\left((Z_{n-1}(t),\widetilde{z}(t))^{-1}\right)^*, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Но из последней формулы следует, что

$$\mathrm{e}^{\Lambda T} S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}} Z^*_{n-1}(t+T) = S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}} Z^*_{n-1}(t),$$

где через $S_{n-1}|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ обозначена матрица, составленная из первых $n-1$ строк матрицы S_{n-1}. Таким образом, для завершения доказательства третьего утверждения достаточно положить

$$\widetilde{D} := \left(S_{n-1}|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)^{-1} \mathrm{e}^{\Lambda T} S_{n-1}\big|_{\mathbb{R}^{n-1}},$$

при этом обращение матрицы $S_{n-1}|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ возможно в силу обратимости матрицы S и установленного выше ее вида.

Лемма доказана.

Определим непрерывно дифференцируемые функции $h, I : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ как

$$h(\theta, r) = \widetilde{x}(\theta) + Y_{n-1}(\theta)r$$

$$I(\theta, r) = \Omega(T, 0, h(\theta, r)),$$

где Ω – оператор сдвига по траекториям системы (3.1).

Лемма 3.2 *Предположим (3.19) и (3.21). Тогда* $\dot{\widetilde{x}}(\theta) \notin I'_r(\theta, 0)\mathbb{R}^{n-1}$ *при каждом* $\theta \in [0, T]$.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует $r \in \mathbb{R}^{n-1}$, $r \neq 0$ такое, что $\dot{\widetilde{x}}(\theta) = I'_r(\theta, 0)r$. Имеем

$$\dot{\widetilde{x}}(\theta) = I'_r(\theta, 0)r = \Omega'_{(3)}(T, 0, h(\theta, 0))Y_{n-1}(\theta)r = Y_{n-1}(\theta + T)r,$$

$$\dot{\widetilde{x}}(\theta - T) = Y_{n-1}(\theta)r.$$

Но $\dot{\widetilde{x}}(\theta) = \dot{\widetilde{x}}(\theta - T)$, и получаем противоречие с утверждением леммы 3.1.

Лемма доказана.

Следствие 3.2 *Предположим, что* $T > 0$ *– наименьший период цикла* $\widetilde{x}$. *Тогда существует* $r_0 > 0$ *такое, что*

$$I\left(\theta, B_{r_0}(0)\right) \cap \widetilde{x}\left([0, T]\right) = \left\{\widetilde{x}(\theta)\right\}.$$

Следствие 3.3 *Предположим, что* $T > 0$ *– наименьший период цикла* $\widetilde{x}$. *Тогда существует* $k_0 > 0$ *такое, что*

$$I\left(\theta, B_r(0)\right) \cap x_{\varepsilon_k}\left([0, T]\right) = \left\{x_{\varepsilon_k}(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta))\right\}, \qquad k > k_0,$$

где $\Delta_{\varepsilon_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция такая, что* $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *равномерно по отношению к* $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 3.2. Сделаем в системе (3.1) замену переменных $\nu_k(t,\theta) = \Omega(0,t,x_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta))$, где $\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)$ – числа, о которых говорится в следствии 3.3. Заметим, что $x_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) = \Omega(t,0,\nu_k(t,\theta))$ и, таким образом,

$$\dot{x}_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) = f(\Omega(t,0,\nu_k(t,\theta)) + \Omega'_\xi(t,0,\nu_k(t,\theta))(\nu_k)'_t(t,\theta). \tag{3.23}$$

С другой стороны, из (3.1) имеем

$$\dot{x}_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) =$$

$$= f(\Omega(t,0,\nu_k(t,\theta))) + \varepsilon_k g(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta, \Omega(t,0,\nu_k(t,\theta)), \varepsilon_k). \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) следует, что

$$(\nu_k)'_t(t,\theta) = \varepsilon_k \left(\Omega'_\xi(t,0,\nu_k(t,\theta))\right)^{-1} g(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta, \Omega(t,0,\nu_k(t,\theta)), \varepsilon_k),$$

и так как

$$\nu_k(0,\theta) = x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) = x_k(T-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) = \Omega(T,0,\nu_k(T,\theta)),$$

окончательно получаем

$$\nu_k(t,\theta) = \Omega(T,0,\nu_k(T,\theta)) + \varepsilon_k \int\limits_0^t \left(\Omega'_\xi(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta))\right)^{-1} \circ$$

$$\circ\, g(\tau-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta, \Omega(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta)), \varepsilon_k)d\tau. \tag{3.25}$$

Так как $\nu_k(t,\theta) \to \widetilde{x}(\theta)$ при $k\to\infty$ можем записать $\nu_k(t,\theta)$ в виде

$$\nu_k(t,\theta) = \widetilde{x}(\theta) + \varepsilon_k \mu_k(t,\theta). \tag{3.26}$$

Докажем теперь, что функции μ_k равномерно ограниченны по отношению к $k\in\mathbb{N}$. Для этого, во-первых, вычтем $\widetilde{x}(\theta)$ из обеих частей (3.25), получив

$$\begin{aligned}\varepsilon_k\mu_k(t,\theta) \;=\; & \varepsilon_k\,\Omega'_\xi(T,0,\widetilde{x}(\theta))\mu_k(T,\theta) + o(\varepsilon_k\mu_k(T,\theta)) + \\ & +\varepsilon_k \int\limits_0^t \left(\Omega'_\xi(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta))\right)^{-1} g(\tau-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \\ & +\theta, \Omega(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta)), \varepsilon_k)d\tau. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Так как $x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) \in I\left(\theta, B^{n-1}_{r_0}(0)\right)$, то по определению I существует $r_k(\theta) \in B^{n-1}_{r_0}(0)$ такое, что

$$x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta) = \Omega(T,0,h(\theta,r_k(\theta))), \tag{3.28}$$

причем на основании (3.4) имеем

$$r_k(\theta) \to 0 \;\text{ при }\; k \to \infty. \tag{3.29}$$

Пользуясь равенством (3.28), получаем следующее представление для $\varepsilon_k\mu_k$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k\mu_k(T,\theta) &= \nu_k(T,\theta) - \widetilde{x}(\theta) = \Omega(0,T,x_k(-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta)) - \widetilde{x}(\theta) = \\
&= \Omega(0,T,\Omega(T,0,h(\theta,r_k(\theta)))) - \widetilde{x}(\theta) = \\
&= h(\theta,r_k(\theta)) - \widetilde{x}(\theta) = Y_{n-1}(\theta)r_k(\theta).
\end{aligned}$$

Следовательно, формула (3.27) при $t = T$ может быть переписана как

$$\begin{aligned}
Y_{n-1}(\theta)r_k(\theta) &= Y_{n-1}(T+\theta)r_k(\theta) + o(Y_{n-1}(\theta)r_k(\theta)) + \\
&+\varepsilon_k \int\limits_0^T \left(\Omega'_\xi(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta))\right)^{-1} g(\tau - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \\
&+\theta, \Omega(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta)), \varepsilon_k)d\tau.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

На основании (3.30) сейчас будет установлено существование такого $c > 0$, что

$$\|r_k(\theta)\| \leq \varepsilon_k c, \quad k \in \mathbb{N},\; \theta \in [0,T]. \tag{3.31}$$

Предположим противное, тогда можем считать, что $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $\theta_k \to \theta_0$ при $k \to \infty$, – такая последовательность, что $\|r_k(\theta_k)\| = \varepsilon_k c_k$, где $c_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Положим $q_k = \dfrac{r_k(\theta_k)}{\|r_k(\theta_k)\|}$, тогда из (3.30) имеем

$$\begin{aligned}
Y_{n-1}(\theta_k)q_k &= Y_{n-1}(T+\theta_k)q_k + \frac{o(Y_{n-1}(\theta_k)r_{\varepsilon_k}(\theta_k))}{\|r_{\varepsilon_k}(\theta_k)\|} + \\
&+\frac{1}{c_k}\int\limits_0^t \left(\Omega'_\xi(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta_k))\right)^{-1} g(\tau - \theta_0 + \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_k) + \\
&+\theta_k, \Omega(\tau,0,\nu_k(\tau,\theta_k)), \varepsilon_k)d\tau.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится, положим $q_0 = \lim_{k\to\infty} q_k$, тогда $\|q_0\| = 1$. С другой стороны, из (3.32) имеем $Y_{n-1}(\theta_0)q_0 = Y_{n-1}(T+\theta_0)q_0$, то есть приходим к противоречию с утверждением 2 леммы 3.1. Таким образом, (3.31) выполнено для некоторого $c > 0$ и функции μ_k равномерно ограниченны по отношению к $k \in \mathbb{N}$. Из (3.26) также заключаем

$$x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \widetilde{x}(t+\theta) = \varepsilon_k \mu_k(t,\theta). \tag{3.33}$$

Следовательно, $x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) \to \widetilde{x}(\theta)$ со скоростью $\varepsilon_k > 0$.

Для завершения доказательства теоремы 3.2 остается установить (3.20). Для этого введем новые функции $a_k : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $b_k : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ согласно следующим формулам

$$a_k(t,\theta) = \widetilde{z}^*(t+\theta)\mu_k(t,\theta),$$

$$b_k(t,\theta) = Z^*_{n-1}(t+\theta)\mu_k(t,\theta). \tag{3.34}$$

Пользуясь утверждением 1 леммы 3.1, можем представить $x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \widetilde{x}(t+\theta)$ в виде

$$x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \widetilde{x}(t+\theta) =$$

$$= \varepsilon_k \dot{\widetilde{x}}(t+\theta)a_k(t,\theta) + \varepsilon_k Y_{n-1}(t+\theta)b_k(t,\theta). \tag{3.35}$$

Вычитая (3.2), где $x(t)$ заменено функцией $\widetilde{x}(t+\theta)$, из (3.1), где $x(t)$ заменено функцией $x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta)$, получаем

$$\dot{x}_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \dot{\widetilde{x}}(t+\theta) =$$

$$= f'(\widetilde{x}(t+\theta))(x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta) - \widetilde{x}(t+\theta)) +$$

$$+ \varepsilon_k g(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta, x_k(t - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta) + \theta), \varepsilon_k) + \widetilde{o}_t(\varepsilon_k), \tag{3.36}$$

где функция $\widetilde{o}_t(\cdot)$ имеет те же свойства, что и функция $o(\cdot)$, введенная ранее, более того $\widetilde{o}_{t+T}(\cdot) = \widetilde{o}_t(\cdot)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Подставляя (3.35) в (3.36) и учитывая, что

$$f'(\widetilde{x}(t+\theta))\varepsilon_k\dot{\widetilde{x}}(t+\theta)a_k(t,\theta) = \varepsilon_k\ddot{\widetilde{x}}(t+\theta)a_k(t,\theta)$$

и

$$f'(\widetilde{x}(t+\theta))\varepsilon_k Y_{n-1}(t+\theta)b_k(t,\theta) = \varepsilon_k\dot{Y}_{n-1}(t+\theta)b_k(t,\theta),$$

получаем

$$\varepsilon_k\dot{\widetilde{x}}(t+\theta)(a_k)'_t(t,\theta) + \varepsilon_k\dot{Y}_{n-1}(t+\theta)(b_k)'_t(t,\theta) =$$

$$= g(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta, x_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta), \varepsilon_k) + \widetilde{o}_t(\varepsilon_k).$$

Из предыдущего равенства имеем

$$\varepsilon_k\left(b_k\right)'_t(t,\theta) =$$

$$= \varepsilon_k Z_{n-1}(t+\theta)g(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta, x_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta), \varepsilon_k) + Z_{n-1}(t+\theta)\widetilde{o}_t(\varepsilon_k)$$

и, следовательно,

$$b_k(0,\theta) = b_k(-T,\theta) + \int\limits_{-T}^{0} Z^*_{n-1}(\tau+\theta)g(\tau-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+$$

$$+\theta, x_k(\tau-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta), \varepsilon_k)d\tau + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}. \tag{3.37}$$

Из (3.37) и утверждения 3 леммы 3.1 получаем

$$b_k(0,\theta) \;=\; (I-\widetilde{D})^{-1}\int\limits_{-T}^{0} Z^*_{n-1}(\tau+\theta)g(\tau-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+$$

$$+\theta, x_k(\tau-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta), \varepsilon_k)d\tau + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}$$

или, вводя замену переменных $\tau+\theta = s$ в интеграле,

$$b_k(0,\theta) = (I-\widetilde{D})^{-1}\int\limits_{\theta-T}^{\theta} Z^*_{n-1}g(s, x_k(s), \varepsilon_k)d\tau + \frac{o(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}.$$

С другой стороны, из (3.35) имеем

$$\langle z_i(t+\theta), x_k(t-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta)+\theta)-\widetilde{x}(t+\theta)\rangle = \varepsilon_k b_k(t,\theta)$$

и, таким образом, для завершения доказательства достаточно положить $D := (I-\widetilde{D})^{-1}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые приложения формулы (3.20) к описанию поведения решений x_k, когда $k\to\infty$. Ниже $\angle(a,b)$ – угол между векторами $a, b\in\mathbb{R}^n$, принадлежащий отрезку $[0,\pi]$.

Следствие 3.4 *Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2. Тогда для любых $i\in\overline{1,n-1}$ и $\theta\in[0,T]$ таких, что $M_i^{\perp}(\theta)\neq 0$, существует $j\in\overline{1,n-1}$, при котором*

$$\cos\angle\left(z_j(\theta), x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\widetilde{x}(\theta)\right)\neq 0$$

для достаточно больших $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство следствия вытекает из формулы

$$\|z_i(\theta)\|\cdot\|x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\widetilde{x}(\theta)\|\cdot\cos\angle\left(z_i(\theta), x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\widetilde{x}(\theta)\right)=$$

$$=\left[\varepsilon_k DM^{\perp}(\theta)\right]^i + o(\varepsilon_k), \tag{3.38}$$

получаемой подстановкой выражения

$$\langle z_i(\theta), x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\widetilde{x}(\theta)\rangle =$$

$$=\|z_i(\theta)\|\cdot\|x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\widetilde{x}(\theta)\|\cdot\cos\angle\left(z_i(\theta), x_k(\theta-\Delta_{\varepsilon_k}(\theta))-\widetilde{x}(\theta)\right)$$

в главную формулу (3.20). Действительно, если $M_i^{\perp}(\theta)\neq 0$, то существует $j\in\overline{1,n-1}$ такое, что $\left[DM^{\perp}(\theta)\right]^j\neq 0$.

Следующий результат является непосредственным следствием формулы (3.38).

Следствие 3.5 *Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2. Если существует по крайней мере одно* $i_* \in \overline{1, n-1}$ *такое, что* $M_{i_*}^{\perp}(\theta) \neq 0$, *то*

$$c_1 \varepsilon_k \leq \|x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \widetilde{x}(\theta)\| \leq c_2 \varepsilon_k$$

для некоторых $0 < c_1 \leq c_2$, *любых* $\theta \in [0, T]$ *и* $k \geq k_0$, *где* $k_0 \in \mathbb{N}$ *достаточно велико.*

Учитывая следствие 3.3, можем получить теперь следующий факт.

Следствие 3.6 *Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2. Если существует по крайней мере одно* $i_* \in \overline{1, n-1}$ *такое, что* $M_{i_*}^{\perp}(\theta) \neq 0$, *то*

$$x_k(t) \neq \widetilde{x}(\theta) \quad \text{для любых } t, \theta \in [0, T]$$

при условии, что $k \in \mathbb{N}$ *достаточно велико.*

Доказательство. Пусть $k_0 > 0$ – то, о котором говорится в следствии 3.5, и предположим, что существуют ε_{k_*}, $k_* > k_0$, $\theta_*, t_* \in [0, T]$ такие, что $x_{k_*}(t_*) = \widetilde{x}(\theta_*)$. Но согласно следствию 3.3 должно быть $t_* = x_{k_*}(\theta_* - \Delta_{\varepsilon_{k_*}}(\theta_*))$, противореча утверждению следствия 3.5.

Следствие доказано.

Для того, чтобы получить теперь достаточные условия, обеспечивающие сходимость со скоростью большей, чем $\varepsilon_k > 0$, нам необходим следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.3 *Пусть* $k_0 \in \mathbb{N}$ *достаточно велико. Тогда для любых* $k > k_0$ *и* $\theta \in [0, T]$, *удовлетворяющих условию*

$$x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) \neq \widetilde{x}(\theta),$$

существует $i_* \in \overline{1, n-1}$ *такое, что*

$$|\cos \angle \left(z_{i_*}(\theta), x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \widetilde{x}(\theta)\right)| \geq \alpha_*,$$

где $\alpha_* > 0$ *не зависит от* k *и* θ.

Доказательство. Предположим противное, тогда можем считать, что последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $\theta_k \to \theta_0$ при $k\to\infty$, $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [-1,1]$, $\alpha_k \to 0$ при $k\to\infty$, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$, $r_k \to 0$ при $k \to \infty$ таковы, что

$$\cos\angle\left(z_i(\theta), I(\theta_k, r_k) - I(\theta_k, 0)\right) = \alpha_k, \qquad i \in \overline{1, n-1},$$

или равносильно

$$\frac{\langle z_i(\theta_k), I(\theta_k, r_k) - I(\theta_k, 0)\rangle}{\|z_i(\theta_k)\| \cdot \|I(\theta_k, r_k) - I(\theta_k, 0)\|} = \alpha_k, \qquad i \in \overline{1, n-1},$$

поэтому

$$\frac{\left\langle z_i(\theta_n), I'_r(\theta_k, r_k)\frac{r_k}{\|r_k\|} + \frac{o(r_k)}{\|r_k\|}\right\rangle}{\|z_i(\theta_k)\| \cdot \left\| I'_r(\theta_k, r_k)\frac{r_k}{\|r_k\|} + \frac{o(r_k)}{\|r_k\|}\right\|} = \alpha_k, \qquad i \in \overline{1, n-1}. \tag{3.39}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\frac{r_k}{\|r_k\|}$ сходится при $k\to\infty$. Положим $q_0 = \lim_{k\to\infty} \frac{r_k}{\|r_k\|}$, тогда $\|q_0\| = 1$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (3.39), получаем

$$\langle z_i(\theta_0), I'_r(\theta_0, 0)q_0\rangle = 0 \quad \text{для любых } i \in \overline{1, n-1}. \tag{3.40}$$

Разложим $I'_r(\theta_0, 0)q_0$ следующим образом

$$I'_r(\theta_0, 0)q_0 = y_1(\theta_0)a^1 + ... + y_{n-1}(\theta_0)a^{n-1} + \dot{\widetilde{x}}(\theta)a^n.$$

Из (3.40) имеем, что $a^1 = ... = a^{n-1} = 0$ и, таким образом, $I'_r(\theta, 0)q_0 = a^n\dot{\widetilde{x}}(\theta)$, противореча утверждению леммы 3.2.

Лемма доказана.

Суммируя теорему 3.2 и лемму 3.3, получаем утверждение.

Следствие 3.7 *Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2. Предположим, что $M_i^{\perp}(\theta) = 0$ для любого $i \in \overline{0, n-1}$. Тогда*

$$\|x_k(\theta - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta)) - \widetilde{x}(\theta)\| = o(\varepsilon_k).$$

Доказательство. Предположим противное, тогда можем считать, что последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $\theta_k \to \theta_0$ при $k \to \infty$ и $c_* > 0$ таковы, что

$$\frac{\|x_{\varepsilon_k}(\theta_k - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_k)) - \widetilde{x}(\theta_k)\|}{\varepsilon_k} \geq c_*. \tag{3.41}$$

Из (3.41) имеем, что предположения леммы 3.3 удовлетворены, пусть $i_* \in \overline{1, n-1}$ – то число, о котором говорится в этой лемме. Но (3.41) противоречит соотношению (3.38), когда $i := i_*$, что завершает доказательство требуемого утверждения.

Следствие доказано.

Следствия 3.4 и 3.7 позволяют сформулировать следующую альтернативу.

Следствие 3.8 *Пусть выполнены все предположения теоремы 3.2. Положим $\theta_* \in [0,T]$. Тогда либо существует $i_* \in \overline{1, n-1}$ такое, что*

$$\cos\angle\left(z_{i_*}(\theta), x_k(\theta_* - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_*)) - \widetilde{x}(\theta_*)\right) \neq 0$$

для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$, либо

$$\|x_k(\theta_* - \Delta_{\varepsilon_k}(\theta_*)) - \widetilde{x}(\theta_*)\| = o(\varepsilon_k).$$

3.3 Сопоставление полученных результатов с имеющимися в литературе

В случае, когда дополнительно известно, что функция g непрерывно дифференцируема и линеаризованная система (3.3) не имеет единичных мультипликаторов, сходимость в (3.4) со скоростью $\varepsilon_k > 0$ следует из формулы разложения решений x_k в ряд по степеням ε_k, даваемой методом малого параметра Пуанкаре (см. Б. П. Демидович [11], Гл. III, § 24, М. Розо [44], Гл. 9, § 1). Если относительно системы (3.3) известно существование мультипликатора $+1$ алгебраической кратности 1, то сходимость в (3.4) со скоростью

$\varepsilon_k > 0$ для случая аналитических и дважды непрерывно дифференцируемых правых частей системы (3.1) доказана соответственно И. Г. Малкиным (см. [29], формула 4.1) и В. С. Лудом (см. [60], формула 1.3 теоремы 1). Однако в работах указанных авторов не отмечался установленный в главе факт (следствие 3.8) о том, что скорость сходимости может иметь и больший, чем $\varepsilon_k > 0$ порядок. Также в классических работах не указаны свойство (3.8) и следствия 3.4-3.6, связанные с качественными свойствами поведения T-периодических решений системы (3.1) при $\varepsilon \to 0$. Если же возмущение всего лишь непрерывно, что является общим предположением теорем о существовании, доказанных в [12], [15], [16], [18], [19], [32], [37]-[39], [45], [50]-[52], [55]-[59], [64]-[67], а также утверждений глав 1 и 2, то результаты о скорости сходимости T-периодических решений системы (3.1) при $\varepsilon \to 0$ в литературе отсутствуют. Предложенные в настоящей главе теоремы частично заполняют этот пробел.

Теорема 3.1 опубликована автором в [25], где также проведено ее доказательство для $t = T$.

Список литературы

[1] Андронов А. А. К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы / А. А. Андронов, А. Витт // Ж. Техн. Физ. – 1934. – Т. 4, вып. 1.– С. 122-143.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1979. – 432 с.

[3] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – М. : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2002. – 400 с.

[4] Берштейн И. Индекс особой точки и существование периодических решений систем с малым параметром / И. Берштейн, А. Халанай // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111, №5. – С. 923-925.

[5] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике / И. И. Блехман. – М. : Наука, 1981. – 352 с.

[6] Бобылев Н. А. Функционализация параметра и теорема родственности для автономных систем / Н. А. Бобылев, М. А. Красносельский // Дифференциальные уравнения. – 1970. – Т. 6, №11. – С. 1946-1952.

[7] Булгаков Н. Г. Колебания квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы и неаналитической характеристикой нелинейности / Н. Г. Булгаков // ПММ. – 1955. – Т. XIX, вып. 3. – С. 265-272.

[8] Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский [и др.]. – М. : Физматгиз, 1963. – 245 с.

[9] Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний / В. Д. Горяченко. – М. : Высш. шк., 2001. – 395 с.

[10] Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.

[11] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Изд. Моск. ун-та, 1998. – 480 с.

[12] Каменский М. И. Об одной модификации принципа усреднения для вырожденных уравнений / М. И. Каменский // ДАН СССР. – 1996. – Т. 347, № 2. – С. 151-153.

[13] Каменский М. И. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Каменский, О. Ю. Макаренков, П. Нистри // ДАН. – 2003. – Т. 388, №4. – С. 439-442.

[14] Кац А. М. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным / А. М. Кац // ПММ. – 1955. – Т. 19, №1. – С. 13-32.

[15] Красносельский А. М. Вынужденные периодические колебания в нелинейных системах / А. М. Красносельский // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276, №6. – С. 1356-1359.

[16] Красносельский А. М. Новые теоремы о вынужденных периодических колебаниях в нелинейных системах управления / А. М. Красносельский // ПММ. – 1986. – Т. 50, №2. – С. 224-230.

[17] Красносельский М. А. О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // УМН. – 1955. – Т. 10, №3 (65). – С. 147-152.

[18] Красносельский М. А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 123, №2. – С. 235-238.

[19] Красносельский М. А. О некоторых признаках существования периодических решений у обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, В. В. Стрыгин // ДАН СССР. – 1964. – Т. 156, №5. – С. 1022-1034.

[20] Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Наука, 1968. – 332 с.

[21] Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1975. – 512 с.

[22] Лерэй Дж. Топология и функциональные уравнения / Дж. Лерэй, Ю. Шаудер // УМН. – 1946. – Т. 1, №3-4. – С. 71-95.

[23] Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений / С. Лефшец. – М. : ИЛ, 1961. – 388 с.

[24] Макаренков О. Ю. Об одном способе построения оператора сдвига для нелинейных уравнений / О. Ю. Макаренков // Труды Молодых Ученых ВГУ. – 2002. – №2. – С. 24-26.

[25] Макаренков О. Ю. Об асимптотическом поведении периодических решений одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром / О. Ю. Макаренков // Труды Математического Факультета ВГУ. – Воронеж, 2002. – №7. – С. 83-86.

[26] Макаренков О. Ю. Об одной модификации принципа усреднения при исследовании периодического режима RC-усилителя вблизи резонанса / О. Ю. Макаренков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2003. – №1. – С. 157-160.

[27] Макаренков О. Ю. Качественное исследование реакции двумерных колебательных систем на малое синусоидальное воздействие / О. Ю. Макаренков // Материалы семинаров научно-образовательного центра "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах" / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2004. – С. 148-157.

[28] Макаренков О. Ю. Вычисление топологического индекса некоторых множеств в задаче о периодических решениях для дифференциальных уравнений с параметром / О. Ю. Макаренков // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования : тез. докл. межд. конф., Воронеж, 12-17 декаб. 2005г. – Воронеж, 2004. – С. 138.

[29] Малкин И. Г. К теории периодических решений Пуанкаре / И. Г. Малкин // ПММ. – 1949. – Т. 13, №6. – С. 633-646.

[30] Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М. : Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., 1956. – 492 с.

[31] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях / В. К. Мельников // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1963. – Т. 12. – С. 3-52.

[32] Митропольский Ю. А. О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы / Ю. А. Митропольский // Укр. Мат. Журн. – 1959. – Т. 11, №4. – С. 366-379.

[33] Митропольский Ю. А. Принцип усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. – Киев : Наукова думка, 1971. – 440 с.

[34] Мишина А. П. Высшая алгебра: Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра / А. П. Мишина, И. В. Проскуряков. – М. :Физматгиз, 1962. – 300 с.

[35] Морозов А. Д. О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга / А. Д. Морозов // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, №2. – С. 241-255.

[36] Морозов А. Д. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым / А. Д. Морозов, Л. П. Шильников // ПММ. – 1983. – Т. 47, №3. – С. 385-394.

[37] Мухамадиев Э. К теории периодических вполне непрерывных векторных полей / Э. Мухамадиев // УМН. – 1967. – Т. 22, №. 2. – С. 127-128.

[38] Мухамадиев Э. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // ДАН СССР. – 1970. – Т. 194, №3. – Р. 510-513.

[39] Мухамадиев Э. Периодические и ограниченные решения систем двух нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. – 1976. – Т. 19, №3. – С. 3-6.

[40] Перов А. И. Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. И. Перов. – Воронеж, 1959. – 129 с.

[41] Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым / Л. С. Понтрягин // ЖЭТФ. – 1934. – Т. IV, вып. 9. – С. 883-885.

[42] Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1974. – 332 с.

[43] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М.-Л. : Гостехиздат, 1947. – 392 с.

[44] Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости / М. Розо. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

[45] Самойленко А. М. К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями / А. М. Самойленко // Укр. Мат. Журн. – 1963. – Т. 15, №3. – С. 328-332.

[46] Стрыгин В. В. Принцип усреднения для уравнений с наследственностью / В. В. Стрыгин // Укр. Мат. Журн. – Т. 22, №4. – С. 503-513.

[47] Borsuk K. Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphare / K. Borsuk // Fund. Math. – 1933. – V. 20. – P. 177-190.

[48] Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten / L. E. J. Brouwer // Mathematische Annalen. – 1911. – V. 71. – P. 97-115.

[49] Brown R. F. A topological introduction to nonlinear analysis / R. F. Brown. – Boston : Birkhäuser, 1993. – 144 p.

[50] Capietto A. Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems / A. Capietto, J. Mawhin, Z. Zanolin // Trans. Amer. Math. Soc. – 1992. – №329. – P. 41-72.

[51] Cronin J. The point at infinity and periodic solutions / J. Cronin // J. Differential Equations. – 1967. – №3. – P. 31-46.

[52] Dancer E. N. Boundary-value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations / E. N. Dancer // Bull. Austral. Math. Soc. – 1976. – №15. – P. 321-328.

[53] Greenspan B. Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators / B. Greenspan, P. Holmes // SIAM J. Math. Anal. – 1984. – V. 15. – P. 69-97.

[54] Hale J. K. Bifurcation from families of periodic solutions / J. K. Hale, P. Táboas // Classical and celestial mechanics. – Princeton Univ. Press, 2002. – P. 351-382.

[55] Henrard M. Bifurcation from a periodic orbit in perturbed planar Hamiltonian systems / M. Henrard, F. Zanolin // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – V. 277. – P. 79-103.

[56] Kamenskii M. Small parameter perturbations of nonlinear periodic systems / M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri // Nonlinearity. – 2004. – №17. – P. 193-205.

[57] Krasnoselskii A. M. On some conditions for existence of forced periodic oscillations / A. M. Krasnoselskii, M. A. Krasnoselskii, J. Mawhin // Differential Integral Equations. – 1992. – V. 5, №6. – P. 1267-1273.

[58] Krasnoselskii A. M. Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities / A. M. Krasnoselskii, J. Mawhin // Nonlinear operator theory. Math. Comput. Modelling. – 2000. – V. 32, №11-13. – P. 1445-1455.

[59] Lazer A. C. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis / A. C. Lazer, P. J. McKenna // SIAM Rev. – 1990. – №. 32. – P. 537-578.

[60] Loud W. S. Periodic solutions of a perturbed autonomous system / W. S. Loud // Ann. of Math. – 1959. – V. 70. – P. 490-529.

[61] Makarenkov O. A new phase entrainment method and its application to a predator-prey interaction model / O. Makarenkov // Proceedings of the International Symposium on Dynamical Systems Theory and Its Applications to Biology and Environmental Sciences, Hamamatsu, Japan, 14-17 march 2004.- №1. – P. 123.

[62] Makarenkov O. On the existence of periodic solutions to the equation of a forced nonlinear oscillator / O. Makarenkov // Proceedings of the 12th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Evora, Portugal, 9-13 may 2004. – P. 235-237.

[63] Makarenkov O. New subharmonic solutions for a class of periodically perturbed integrable systems / O. Makarenkov // Proceedings of the Barcelona Conference in Planar Vector Fields, Barcelona, Spain, 13-17 febr. 2006. – CRM, 2006. – P. 12-14.

[64] Mawhin J. Le Problème des Solutions Périodiques en Mécanique non Linéaire / J. Mawhin // Thèse de doctorat en sciences, Université de Liège, 1969.

[65] Mawhin J. Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires / J. Mawhin // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. – 1969. – V. 38. – P. 308-398.

[66] Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems / J. Mawhin. – Providence R.I. : Amer. Math. Soc., 1979. – 122 p.

[67] Ortega R. Some applications of the topological degree to stability theory / R. Ortega // Topological methods in differential equations and inclusions: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. – Dordrecht, 1995. – №472. – P. 377-409.

[68] Perron O. Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme / O. Perron // Math. Zeitschr. – 1930. – V. 31. – P. 748-766.

[69] Rhouma M. B. H. On the continuation of periodic orbits / M. B. H. Rhouma, C. Chicone // Methods Appl. Anal. – 2000. – V. 7. – P. 85-104.

[70] Rudin W. Principles of mathematical analysis / W. Rudin. – NY : McGraw-Hill Book Co., 1976. – 351 p.

[71] Schneider K. R. Vibrational control of singularly perturbed systems / K. R. Schneider // Lecture Notes in Control and Information Science / Springer Verlag. – London, 2001. – V. 259. – P. 397-408.

[72] Yagasaki K. The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations / K. Yagasaki // SIAM J. Appl. Math. – 1996. – V. 56, №6. – P. 1720-1756.